Г. В. БУШМАНОВА, А. П. НОРДЕН

ВВЕДЕНИЕ В КОНФОРМНУЮ ГЕОМЕТРИЮ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1964

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Казанского университета*

Научный редактор ***А. П. Широков***

Преобразование фигуры в другую фигуру, определенным образом связанную с данной, является одним из распространенных средств геометрического исследования. Уже в элементарной геометрии применяются преобразование подобия и преобразование инверсии. Движение, с помощью которого фигуры налагаются друг на друга, тоже является примером преобразования.

Фундаментальная роль понятия преобразования в вопросах обоснования геометрии и классификации различных геометрических систем была впервые установлена Феликсом Клейном в его „Эрлангенской программе“ (1872 г.).

Центральная идея Эрлангенской программы связана с понятием группы, т. е. такой совокупности преобразований, которая подчиняется следующим двум условиям: 1) произведение любых двух преобразований совокупности принадлежит той же совокупности; 2) преобразование, обратное любому преобразованию совокупности, принадлежит той же совокупности.

Отмечая, что движения образуют группу и ее строение вполне характеризует элементарную геометрию, Клейн приходит к расширенному понятию геометрии, формулируя ее задачу следующим образом: дано многообразие и в нем группа преобразований; нужно исследовать те свойства образов, принадлежащих многообразию, которые не изменяются от преобразований группы.

Из этого общего определения следует, что существуют различные геометрии. Они могут отличаться друг от друга характером элементов многообразия и строением группы. Последнее различие является наиболее существенным. Если геометрии отличаются между собой по характеру элементов многообразия, но их фундаментальные группы изоморфны[1], то каждому факту одной геометрии будет соответствовать факт другой и каждую из них можно изучать на основе другой. В этом сущность *принципа перенесения*, как его называет Клейн.

В качестве примеров геометрий, характеризуемых группами преобразований, Клейн называет, кроме элементарной, или евклидовой геометрии, аффинную, неевклидовы геометрии пространства положительной и отрицательной кривизны и проективную геометрию. Последняя является наиболее общей, так как фундаментальные группы всех предыдущих изоморфны некоторым подгруппам проективной группы. Так, группа аффинных преобразований трехмерного пространства изоморфна такой подгруппе проективных преобразований, которая переводит в себя некоторую плоскость (несобственную плоскость), а группы неевклидовых движений изоморфны подгруппам проективного пространства, переводящим в себя поверхность 2-го порядка (абсолют). Группа движений трехмерного пространства тоже изоморфна подгруппе проективных преобразований, сохраняющих некоторую мнимую кривую 2-го порядка (сферическую окружность).

Наряду с указанными геометриями, которые были известны и до появления Эрлангенской программы, Клейн предложил рассмотреть геометрию фундаментальной группы, состоящую из всех движений, подобных преобразований и инверсий евклидова пространства и предложил назвать ее геометрией обратных радиусов. Так как основным инвариантом этой геометрии является угол между двумя направлениями, то в настоящее время ее чаще называют *конформной*[2].

Множество элементов, на которое действует фундаментальная группа конформных преобразований, не

---

[1] Изоморфными называются группы, если между их преобразованиями можно установить взаимно однозначное соответствие так, чтобы произведения соответствующих преобразований соответствовали.

[2] Употребительными являются также название инверсионной, круговой геометрии или геометрии Мёбиуса (по имени Мёбиуса *А. F.*, изучавшего ряд свойств преобразования инверсии).

совпадает, строго говоря, с евклидовым пространством. Чтобы сделать все преобразования инверсии имеющими смысл, необходимо дополнить совокупность всех точек евклидова пространства еще одной бесконечно удаленной точкой, в которую и переходит центр всякой окружности, по отношению к которой совершается преобразование инверсии. После этого прямые считаются кругами, проходящими через бесконечно удаленную точку, и это позволяет сформулировать без всяких оговорок следующее положение: при любом преобразовании конформной группы круги переходят в круги.

При сравнении конформной геометрии с проективной бросаются в глаза глубокие различия между ними. Тем более замечательным был результат Клейна, согласно которому фундаментальная группа конформной геометрии изоморфна некоторой подгруппе проективной группы. Чтобы прийти к этому результату хотя бы в случае конформной плоскости, Клейн поступает следующим образом. Он рассматривает ее как плоскость в трехмерном евклидовом пространстве и берет в этом же пространстве сферу S, которую и отображает стереографически[1] на рассматриваемую плоскость. С другой стороны, всякой точке A пространства, расположенной вне сферы, сопоставляется круг, по которому сфера пересекается с полярой точки A, а при стереографическом отображении этот круг переходит в окружность α на плоскости. Если теперь рассмотреть ту подгруппу проективных преобразований пространства, при которых сфера S переходит в себя, то ей будет соответствовать на плоскости группа преобразований, переводящих круги в круги, а она будет совпадать с фундаментальной группой конформных преобразований. Итак, *группа конформных преобразований конформной плоскости изоморфна подгруппе проективных преобразований трехмерного пространства, переводящего в себя овальную поверхность 2-го порядка, т. е., в сущности, группе неевклидовых движений трехмерного пространства.*

---

[1] Т. е. проектируя все точки со сферы на плоскость из некоторой точки той же сферы.

Этот факт имеет не только важное принципиальное значение, но и позволяет применить для изучения конформной геометрии тот же аналитический аппарат, который применяется для изучения неевклидовых геометрий, т. е. аппарат однородных координат и векторную алгебру.

В настоящей работе дается изложение основных фактов конформной геометрии плоскости. Наряду с фактами аналитической геометрии (углы между кругами, пучки кругов и т. д.) рассматриваются вопросы дифференциальной геометрии последовательности кругов, дифференциальной геометрии кривых на плоскости.

В последнем параграфе рассматриваются вопросы конформной геометрии трехмерного пространства. Во всем изложении постоянно используется изоморфизм группы конформных отображений пространства указанной выше подгруппе проективных отображений пространства измерения на единицу выше, т. е. группе гиперболических движений. Поэтому работа начинается с изложения необходимых сведений о проективной геометрии и о введении в нее метрики.

§ 1. Основные положения проективной геометрии на плоскости

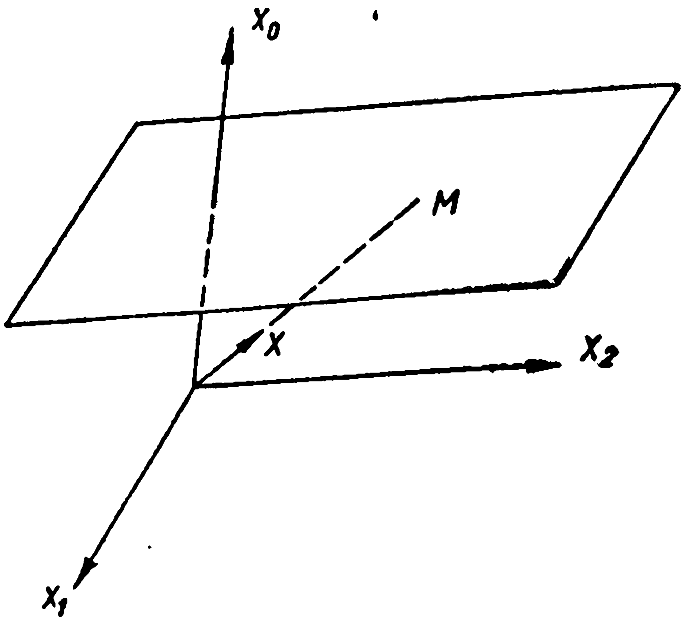
1. Точка M проективной плоскости вполне определяется вектором $\boldsymbol{x}$, направленным в эту точку из некоторой точки вне плоскости. Вектор $\boldsymbol{x}$, соответствующий данной точке, определяется с точностью до скалярного множителя, так как вектор $\lambda\boldsymbol{x}$ определяет то же направление, что и вектор $\boldsymbol{x}$, и, следовательно, ту же точку M.

Величина, определенная с точностью до множителя, называется псевдовеличиной. Выбор определенного значения этого множителя означает нормирование этой псевдовеличины. Исходя из этого можно сказать, что *точка проективной плоскости определяется псевдовектором* $\boldsymbol{x}$.

Будем в дальнейшем говорить не „псевдовектор $\boldsymbol{x}$, определяющий точку“, а просто „точка $\boldsymbol{x}$“.

Введем пространственную декартову систему координат с началом в точке O и осями x_0, x_1, x_2, из которых x_1 и x_2 параллельны рассматриваемой плоскости. *Каждый псевдовектор* $\boldsymbol{x}$, *а, следовательно, и каждая точка M проективной плоскости определяются тремя определенными с точностью до общего множителя координатами* x_0, x_1, x_2. Они называются однородными координатами точки.

Векторам $\boldsymbol{x}$, параллельным плоскости, соответствуют несобственные точки плоскости. Эти точки характеризуются тем, что у них $x_0 = 0$.



2. Проективными преобразованиями координат x_i точки M называются линейные однородные преобразования с определителем, не равным нулю, т. е. преобразования вида

$$x_i = \sum_{j=0}^{2} p_i^j x_j^*; \quad i = 0,\ 1,\ 2;\ |p_i^j| \neq 0, \tag{1.1}$$

где x_j^* — новые координаты точки M.

Формулы (1.1) можно истолковать не только как соотношения, связывающие однородные координаты одной и той же точки в двух различных системах координат, но и как формулы, связывающие координаты различных точек относительно одной и той же системы координат.

Две точки M и M^* называются проективно соответствующими, если их однородные координаты x_i и x_i^* связаны соотношениями

$$x_i^* = \sum_{j=0}^{2} p_i^j x_j;\ i = 0,\ 1,\ 2;\ |p_i^j| \neq 0. \tag{1.1'}$$

Равенства (1.1′) *определяют фундаментальную группу преобразований проективной геометрии плоскости.*

Если точки $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$, ... находятся в линейной зависимости, т. е. имеет место равенство

$$\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y} + \gamma \boldsymbol{z} + \ldots = 0,$$

когда α, β, γ, ... не все одновременно равны нулю, то и после преобразования (1.1′) эта линейная зависимость сохраняется.

3. *Прям я проективной плоскости задается уравнением*

$$t = \alpha y + \beta z, \tag{1.2}$$

где y и z — две различные точки прямой, t — текущая точка, а α и β — численные коэффициенты[1]. Каждой точке прямой t соответствует определенное отношение $\alpha:\beta$.

При проективных преобразованиях (1.1′) прямая переходит в прямую.

Если расписать уравнения (1.2) в координатах и исключить из полученной системы α и β, то получится уравнение прямой в виде

$$u_0x_0 + u_1x_1 + u_2x_2 = 0, \tag{1.2′}$$

где

$$u_0:u_1:u_2 = \begin{vmatrix} y_1z_1 \\ y_2z_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} y_2z_2 \\ y_0z_0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} y_0z_0 \\ y_1z_1 \end{vmatrix}.$$

Прямая определяется, если заданы определенные с точностью до множителя величины u_0, u_1, u_2. Они называются однородными линейными, или тангенциальными координатами прямой.

4. Пусть на прямой заданы две точки

$$\begin{aligned} p &= \alpha_1 y + \beta_1 z \\ q &= \alpha_2 y + \beta_2 z. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Выражение

$$D(y, z, p, q) = \frac{\beta_1}{\alpha_1} : \frac{\beta_2}{\alpha_2} \tag{1.4}$$

называется двойным, или ангармоническим, отношением четырех точек: y, z, p, q, *лежащих на прямой*. Это отношение не зависит от нормирования векторов, не изменяется при проективных преобразованиях и, таким образом, является инвариантом проективной геометрии.

Двойное отношение зависит от порядка, в котором рассматриваются точки. Оно меняет свою величину

[1] Формула (1.2) дает разложение точки t по точкам y и z.

на обратную при перестановке точек первой или второй пары. При перестановке первой пары со второй это отношение не меняется. Доказательство этих положений можно найти в любом полном курсе аналитической геометрии [11; стр. 334].

Если двойное отношение четырех точек на прямой равно — 1, то говорят, что эти точки образуют гармоническую четверку точек.

Двойное отношение

$$D(y, z, p, q) = -1$$

тогда и только тогда, если

$$\begin{aligned} p &= \alpha y + \beta z \\ q &= \sigma\alpha y - \sigma\beta z, \end{aligned} \qquad (1.5)$$

где σ — произвольный множитель [11; стр. 347].

Выразим двойное отношение точек через координаты.

Пусть точки x, y, p, q лежат на прямой, принятой за ось координат, и имеют неоднородные координаты ξ^{I}, ξ^{II}, ξ^{III}, ξ^{IV} соответственно. Однородные координаты этих точек ξ_0^i, ξ_1^i ($i = $ I, II, III, IV) введем как обычно: $\xi^i = \frac{\xi_1^i}{\xi_0^i}$, и положим $\xi_0^i = 1$. Тогда равенства (1.3) запишутся в координатах следующим образом:

$$\begin{aligned} \xi^{III} &= \alpha_1\xi^{I} + \beta_1\xi^{II} \\ \xi^{IV} &= \alpha_2\xi^{I} + \beta_2\xi^{II} \\ 1 &= \alpha_1 + \beta_1 \\ 1 &= \alpha_2 + \beta_2, \end{aligned} \qquad (1.6)$$

и двойное отношение (1.3) будет иметь значение

$$D(x, y, p, q) = \frac{(\xi^{III} - \xi^{I})(\xi^{IV} - \xi^{II})}{(\xi^{III} - \xi^{II})(\xi^{IV} - \xi^{I})}. \qquad (1.7)$$

Одним из основных понятий проективной геометрии является разделение точек одной пары точками другой [11, стр. 333].

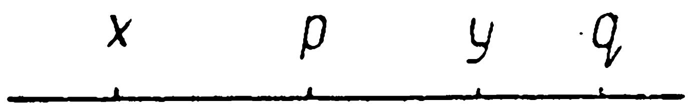
Если точки первой пары x и y не разделяются точками второй пары p, q (см. A), то из (1.7) следует, что

$$D(x, y, p, q) > 0;$$

если разделяются (см. B), то

$$D(x, y, p, q) < 0.$$

A



B

Наряду с двойным отношением четырех точек рассматривают двойное отношение четырех прямых, принадлежащих пучку. Оно равно двойному отношению четырех точек, являющихся точками пересечения прямой, не проходящей через центр пучка, с четырьмя рассматриваемыми прямыми. Это двойное отношение имеет инвариантный характер, как и отношение точек на прямой.

5. *Линия, задаваемая уравнением*

$$\sum_{\alpha, \beta=0}^{2} b_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta = 0, \tag{1.8}$$

называется кривой 2-го порядка. Если определитель $|b_{\alpha\beta}| \neq 0$, то кривая не распадающаяся.

При проективных преобразованиях (1.1′) кривая 2-го порядка переходит в кривую 2-го порядка.

При подходящем выборе системы координат уравнение (1.8) можно привести к одному из двух видов [11; стр. 401]:

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0 \tag{1.9}$$

или

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0. \tag{1.9′}$$

В случае (1.9) кривая действительная, в случае (1.9′) — мнимая. В дальнейшем, если не оговорено особо, предполагаем, что кривая действительная.

Если наряду с однородными координатами рассматривать и неоднородные:

$$x = \frac{x_1}{x_0}, \quad y = \frac{x_2}{x_0}, \tag{1.10}$$

то уравнение (1.9) запишется в виде

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{1.11}$$

В таком виде можно записать уравнение любой действительной кривой 2-го порядка.

6. Квадратичную форму в правой части уравнения (1.9) обозначим сокращенно через $(\boldsymbol{xx})$, т. е. положим

$$(\boldsymbol{xx}) = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2. \tag{1.12}$$

Уравнение кривой второго порядка будет

$$(\boldsymbol{xx}) = 0. \tag{1.13}$$

Билинейная форма, соответствующая квадратичной форме (1.12), будет

$$(\boldsymbol{yz}) = -y_0z_0 + y_1z_1 + y_2z_2. \tag{1.14}$$

Выражение $(\boldsymbol{yz})$ *будем называть в дальнейшем полярным произведением.* Оно составлено для псевдовекторов $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$ и поэтому определяется с точностью до скалярного множителя.

Полярное произведение $(\boldsymbol{yz})$ подчиняется закону коммутативности, закону ассоциативности по отношению к скалярному множителю и закону дистрибутивности.

Если $\boldsymbol{y} = m\boldsymbol{p} + n\boldsymbol{q}$, а $\boldsymbol{z} = l\boldsymbol{p} + s\boldsymbol{q}$, то, как следствие закона дистрибутивности и ассоциативности, можно записать равенство

$$(\boldsymbol{yz}) = ml(\boldsymbol{pp}) + (ms + nl)(\boldsymbol{pq}) + ns(\boldsymbol{qq}). \tag{1.15}$$

Две точки $\boldsymbol{y}$ *и* $\boldsymbol{z}$ *называются полярно сопряженными относительно кривой 2-го порядка* (1.13), если имеет место соотношение

$$(\boldsymbol{yz}) = 0. \tag{1.16}$$

Покажем, что полярно сопряженные точки $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$ и точки $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ пересечения прямой $\{\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$ с кривой

(1.13) составляют гармоническую четверку. Пусть $y = mp + nq$, а $z = lp + sq$. Тогда из (1.15) и (1.16) имеем:

$$ml(pp) + (ms + nl)(pq) + ns(qq) = 0.$$

Так как точки p и q лежат на кривой, то $(pp) = (qq) = 0$, $(pq) \neq 0$, и, значит, $ms + nl = 0$, или $\frac{m}{l} = -\frac{n}{s} = \frac{1}{\sigma}$, т. е. $y = mp + nq$, $z = \sigma mp - \sigma nq$, откуда, согласно (1.5), следует, что точки y, z, p, q составляют гармоническую четверку.

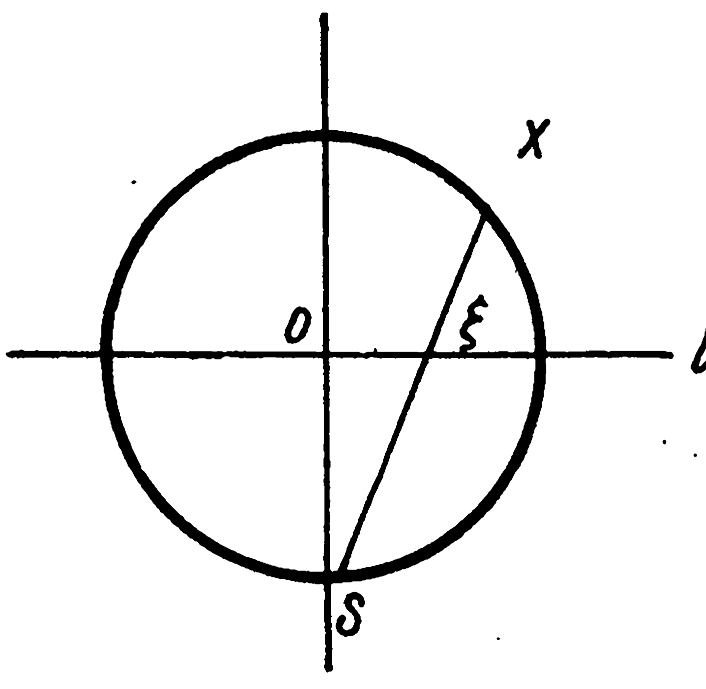
Если в уравнении (1.16) точка y считается закрепленной, то это уравнение будучи линейным относительно z, задает прямую. *Точка* $y(y_0, y_1, y_2)$ *называется полюсом, а прямая* (1.16)

$$-y_0z_0 + y_1z_1 + y_2z_2 = 0$$

полярой этой точки относительно кривой (1.13).

7. *Будем проектировать точки кривой* (1.13) *на прямую* l *из некоторой точки* s *этой кривой и назовем это отображение стереографической проекцией точек кривой 2-го порядка на прямую.*

Возьмем уравнение кривой (1.13) в однородных координатах, т. е. в виде (1.9), уравнение прямой l пусть будет $x_2 = 0$, и точка s имеет координаты s (1, 0, −1). Соответствующими будем считать точки



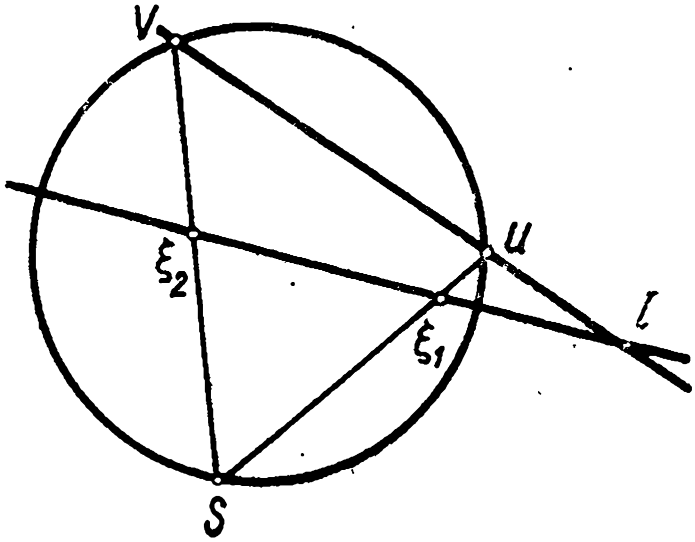
$\boldsymbol{x}(x_0, x_1, x_2)$ и $\xi(1, \xi, 0)$. Для взаимной однозначности соответствия положим, что самой точке $\boldsymbol{s}$ соответствует несобственная точка прямой l. Имеем: $\boldsymbol{x} = \sigma\boldsymbol{s} + \rho\xi$, или в координатах: $x_0 = \sigma + \rho$, $x_1 = \rho\xi$, $x_2 = -\sigma$. Так как $(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}) = 0$, или $-(\sigma + \rho)^2 + \rho^2\xi^2 + \sigma^2 = 0$, то $\sigma = \frac{-\rho(1-\xi^2)}{2}$. Получаем следующие формулы, связывающие координаты точек $\boldsymbol{x}$ и ξ:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= \rho\frac{1+\xi^2}{2},\\
x_1 &= \rho\xi, \qquad\qquad (1.17)\\
x_2 &= \rho\frac{1-\xi^2}{2},
\end{aligned}
$$

где ρ — произвольный множитель.

Точку $\boldsymbol{s}$ круга получим, когда $\xi \to \infty$, а $\rho \to 0$ так, что $\rho\xi \to 0$, а $\rho\xi^2$ конечно.

Точке $\boldsymbol{x}$ вне кривой (1.13), для которой $(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}) > 0$, соответствует прямая — поляра этой точки относительно кривой. Поляра пересекает кривую в двух точках $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$. За стереографическое отображение точки $\boldsymbol{x}$ в этом случае принимаем пару точек прямой ξ_1 и ξ_2, соответствующих при проектировании из $\boldsymbol{s}$ точкам $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$. Когда точка $\boldsymbol{x}$ оказывается на кривой,



то $(xx)=0$, обе точки ξ_1 и ξ_2 сливаются в одну ξ — стереографическую проекцию точки на кривой в установленном выше смысле. Для точек внутри кривой (1.13), для которых $(xx)<0$, стереографическая проекция смысла не имеет.

За двойное отношение точек на кривой 2-го порядка принимаем отношение точек на прямой, соответствующих точкам кривой в стереографической проекции[1].

Пусть точкам кривой x^{I}, x^{II}, x^{III}, x^{IV} соответствуют точки прямой ξ^{I}, ξ^{II}, ξ^{III}, ξ^{IV}. Их двойное отношение, согласно (1.7), будет

$$D(\xi^{\mathrm{I}},\ \xi^{\mathrm{II}},\ \xi^{\mathrm{III}},\ \xi^{\mathrm{IV}})=\frac{(\xi^{\mathrm{III}}-\xi^{\mathrm{I}})(\xi^{\mathrm{IV}}-\xi^{\mathrm{II}})}{(\xi^{\mathrm{III}}-\xi^{\mathrm{II}})(\xi^{\mathrm{IV}}-\xi^{\mathrm{I}})}.$$

Оно по определению равно $D(x^{\mathrm{I}},\ x^{\mathrm{II}},\ x^{\mathrm{III}},\ x^{\mathrm{IV}})$. Выразим разности $\xi^i-\xi^j$, где $i,\ j=\mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{III},\ \mathrm{IV}$, через координаты точек кривой. Из (1.17) имеем:

$$(x^i x^j)=-x_0^i x_0^j+x_1^i x_1^j+x_2^i x_2^j=$$
$$=-\rho^i\rho^j\,\frac{(1+\xi^{i2})}{2}\cdot\frac{(1+\xi^{j2})}{2}+\rho^i\rho^j\xi^i\xi^j+$$
$$+\rho^i\rho^j\,\frac{(1-\xi^{i2})}{2}\cdot\frac{(1-\xi^{j2})}{2}=-\frac{1}{4}\rho^i\rho^j\,[1+\xi^{i2}+$$
$$+\xi^{j2}+\xi^{i2}\xi^{j2}-4\xi^i\xi^j-1+\xi^{i2}+\xi^{j2}-\xi^{i2}\xi^{j2}]=$$
$$=-\frac{1}{2}\rho^i\rho^j\,(\xi^i-\xi^j)^2.$$

Таким образом, с точностью до знака

$$\xi^i-\xi^j=\sqrt{\frac{-2\,(x^i x^j)}{\rho^i\rho^j}}.$$

Подставляя эти выражения в формулу (1.7), получаем

$$D(x^{\mathrm{I}},\ x^{\mathrm{II}},\ x^{\mathrm{III}},\ x^{\mathrm{IV}})=D=\sqrt{\frac{(x^{\mathrm{I}}\ x^{\mathrm{III}})(x^{\mathrm{II}}\ x^{\mathrm{IV}})}{(x^{\mathrm{II}}\ x^{\mathrm{III}})(x\ \ x^{\mathrm{IV}})}}.\qquad(1.18)$$

Знак корня остается здесь неопределенным.

---

[1] Это двойное отношение не зависит от выбора точки s, из которой производится проектирование [2; стр. 102].

Наряду с формулой (1.18) можно получить для D и другую, не содержащую радикалов. Из формулы (1,7) следует, что

$$2D-1=\frac{2(\xi^{III}-\xi^{I})(\xi^{IV}-\xi^{II})-(\xi^{III}-\xi^{II})(\xi^{IV}-\xi^{I})}{(\xi^{III}-\xi^{II})(\xi^{IV}-\xi^{I})}.$$

Пользуясь тождеством

$$(\xi^{I}-\xi^{III})^2(\xi^{II}-\xi^{IV})^2-(\xi^{I}-\xi^{II})^2(\xi^{III}-\xi^{IV})^2=$$
$$=(\xi^{I}-\xi^{IV})(\xi^{II}-\xi^{III})[2(\xi^{III}-\xi^{I})(\xi^{IV}-\xi^{II})-$$
$$-(\xi^{III}-\xi^{II})(\xi^{IV}-\xi^{I})],$$

можно преобразовать последнее выражение к виду

$$2D-1=\frac{(\xi^{I}-\xi^{III})^2(\xi^{II}-\xi^{IV})^2-(\xi^{I}-\xi^{II})^2(\xi^{III}-\xi^{IV})^2}{(\xi^{I}-\xi^{IV})(\xi^{II}-\xi^{III})^2}.$$

Сюда входят только квадраты разностей $\xi^i-\xi^j$, и поэтому для двойного отношения точек круга получается выражение, не содержащее радикалов:

$$2D-1=\frac{(x^{I}\,x^{III})(x^{II}\,x^{IV})-(x^{I}\,x^{II})(x^{III}\,x^{IV})}{(x^{I}\,x^{IV})(x^{II}\,x^{III})}. \quad (1.19)$$

§ 2. Проективные метрики

1. Во введении говорилось о точке зрения Клейна, согласно которой всякой группе преобразований некоторого многообразия соответствует геометрия этого многообразия. Так, например, группе движений обычного пространства соответствует элементарная, или евклидова, геомéтрия этого пространства, группе аффинных преобразований соответствует аффинная, а группе проективных — проективная геометрия. Группа движений и аффинная группа являются подгруппами проективной группы.

Наряду с этими подгруппами Клейн предложил рассматривать такие подгруппы проективных преобразований, которые переводят в себя некоторый образ 2-го порядка, т. е. кривую 2-го порядка или 2-го класса проективной плоскости, поверхность 2-го порядка или 2-го класса пространства.

Геометрии, соответствующие этим подгруппам, называются *геометриями пространств Клейна, или* *пространств постоянной кривизны*, а соответствующий образ 2-го порядка, переходящий в себя, называется *абсолютом этих геометрий*.

Можно показать, что с этой точки зрения евклидова геометрия пространства 2-х или 3-х измерений есть геометрия Клейна, абсолютом которой является пара мнимо сопряженных точек или мнимая кривая, расположенные на несобственной прямой или в несобственной плоскости соответственно, т. е. некоторый вырожденный образ 2-го порядка. Рассмотрим теперь такие плоские геометрии Клейна, абсолютом которых являются невырожденные кривые. При подходящем выборе координат уравнения этих кривых можно записать в виде

$$-x_0^2+x_1^2+x_2^2=0 \qquad (2.1)$$

или

$$x_0^2+x_1^2+x_2^2=0. \qquad (2.2)$$

Первая кривая — действительная. Геометрия Клейна, абсолютом которой она является, называется гиперболической. Вторая кривая — мнимая. Соответствующая ей геометрия называется эллиптической.

2. Рассмотрим подробнее геометрию Клейна с абсолютом (2.1), так как в дальнейшем нам придется заниматься в основном именно гиперболической геометрией. Обозначим левую часть уравнения (2.1) через $(\boldsymbol{xx})$, т е. положим

$$(\boldsymbol{xx})=-x_0^2+x_1^2+x_2^2. \qquad (2.3)$$

Выражение билинейной по отношению к данному абсолюту формы

$$(\boldsymbol{yz})=-y_0z_0+y_1z_1+y_2z_2 \qquad (2.4)$$

является полярным произведением точек $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$. Если абсолют задан в произвольных координатах уравнением

$$\sum_{\alpha,\beta=0}^{2} a_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, x_\beta = 0,$$

то полярное произведение будет

$$(\boldsymbol{yz})=\sum_{\alpha,\beta=0}^{2} a_{\alpha\beta}\, y_\alpha\, z_\beta\,.$$

Равенство нулю полярного произведения (yz) означает полярную сопряженность точек y и z относительно абсолюта.

Абсолют (2.1) разбивает проективную плоскость на две различные области: внутреннюю и внешнюю. Касательные из внешней точки к абсолюту — действительные, из внутренней комплексно-сопряженные. Для внутренних точек x полярный квадрат $(xx) < 0$, для внешних $(xx) > 0$, для точек на абсолюте $(xx) = 0$.

Для точек, не лежащих на абсолюте, можно ввести так называемые *канонические координаты*. Переход от произвольных координат точки к каноническим осуществляется по формуле

$$\check{x} = \frac{x}{\sqrt{(xx)}}, \tag{2.5}$$

если точка x внешняя по отношению к абсолюту, или по формуле

$$\check{x} = \frac{x}{\sqrt{-(xx)}}, \tag{2.6}$$

если точка x лежит внутри абсолюта, причем x и $\check{x}$ обозначают одну и ту же точку, но в произвольных и канонических координатах соответственно. Из определения канонических координат точки следует, что $(\check{x}\check{x}) = +1$, если точка $\check{x}$ — внешняя к абсолюту, и $(\check{x}\check{x}) = -1$, если точка $\check{x}$ — внутренняя.

Пусть x и y — две данные точки, не лежащие на абсолюте. Предполагаем, что они заданы в канонических координатах, но значок $\vee$ не пишем. Определим расстояние между точками x и y. Для этого рассмотрим на прямой $\{x, y\}$ точку z, полярно сопряженную точке x относительно абсолюта, т. е. точку, для которой $(xz) = 0$. Точка z может лежать вне абсолюта $/(zz) = 1/$, внутри его $/(zz) = -1/$ или на нем $/(zz) = 0/$. Рассмотрим сначала случаи, когда z не лежит на абсолюте.

Разложим точку y по точкам x и z:

$$y = \lambda x + \mu z. \tag{2.7}$$

Пусть (xx) и (zz) имеют одинаковые знаки. Тогда из

$$(yy) = \lambda^2 (xx) + \mu^2 (zz)$$

следует, что (yy) имеет тот же знак, что и (xx), и что $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ (можно считать, что этот знак плюс, т. к. в противном случае можно изменить знак у всех членов в уравнении абсолюта $(xx) = 0$ и таким образом добиться, чтобы произведения (yy) и (xx) имели знак плюс). Тогда

$$y = x \cos \varphi + z \sin \varphi. \tag{2.8}$$

Пусть (xx) и (zz) имеют разные знаки. Из равенства

$$(yy) = \lambda^2 (xx) + \mu^2 (zz)$$

следует, что

$$\lambda^2 - \mu^2 = \pm 1,$$

причем плюс будет в том случае, когда знаки (xx) и (yy) одинаковы. Тогда можно положить $\lambda = \operatorname{ch} \varphi$, $\mu = \operatorname{sh} \varphi$ и

$$y = x \operatorname{ch} \varphi + z \operatorname{sh} \varphi. \tag{2.9}$$

Если знаки (xx) и (yy) противоположны, то следует положить $\lambda = \operatorname{sh} \varphi$, $\mu = \operatorname{ch} \varphi$ и

$$y = x \operatorname{sh} \varphi + z \operatorname{ch} \varphi. \tag{2.10}$$

Формула (2.10) получается из формулы (2.9), если точки x и z поменять местами. Случай противоположных знаков (xx) и (yy) соответствует тому, что точки x и y находятся одна вне, другая внутри абсолюта. Для дальнейшего рассмотрения этот случай значения не имеет. Поэтому останавливаться на формуле (2.10) мы не будем.

Будем называть величину φ, введенную ф. (2.8) *и* (2.9), *расстоянием между точками x, y.*

3. Расстояние φ двух точек x и y просто выражается через натуральный логарифм двойного отношения этих точек и точек t_1 и t_2 пересечения прямой, проходящей через эти точки (или прямой, проходящей через точки x и z)

$$t = \lambda x + \mu z$$

с абсолютом.

Чтобы найти t_1 и t_2, надо определить отношение $\frac{\lambda}{\mu}$ из равенства

$$(tt) = (\lambda x + \mu z)^2 = 0. \qquad (2.11)$$

В случае, если знаки (xx) и (zz) одинаковые, (2.11) имеет место, когда

$$\lambda^2 + \mu^2 = 0,$$

т. е. когда $\mu = \pm i\lambda$. Тогда $t_1 = x + iz$, $t_2 = x - iz$, или $x = \frac{t_1 + t_2}{2}$, $z = \frac{t_1 - t_2}{2i}$. Отсюда и из (2.8) имеем:

$$y = \frac{t_1 + t_2}{2}\cos\varphi + \frac{t_1 - t_2}{2i}\sin\varphi = \frac{1}{2}(\cos\varphi - i\sin\varphi)\, t_1 + \frac{1}{2}(\cos\varphi + i\sin\varphi)\, t_2 = e^{-i\varphi} t_1 + e^{i\varphi} t_2.$$

Таким образом,

$$D(t_1, t_2, x, y) = e^{-2i\varphi}$$

и

$$\varphi = \frac{i}{2}\ln D(t_1, t_2, x, y). \qquad (2.12)$$

В случае, когда знаки (xx) и (zz) разные, из (2.11) следует, что $\lambda^2 - \mu^2 = 0$, т. е. $\mu = \pm\lambda$. Тогда $t_1 = x + z$, $t_2 = x - z$, или $x = \frac{t_1 + t_2}{2}$, $z = \frac{t_1 - t_2}{2}$. Подставляя x и z в (2.9), получаем:

$$y = \frac{t_1 + t_2}{2}\operatorname{ch}\varphi + \frac{t_1 - t_2}{2}\operatorname{sh}\varphi = e^{\varphi} t_1 + e^{-\varphi} t_2.$$

Двойное отношение

$$D(t_1, t_2, x, y) = e^{2\varphi}$$

и

$$\varphi = \frac{1}{2}\ln D(t_1, t_2, x, y). \qquad (2.13)$$

Формулы (2.12) и (2.13) выражают расстояние φ двух точек через натуральный логарифм некоторого двойного отношения. Из этих формул сразу видно, что расстояние двух точек, введенное нами, является инвариантом группы гиперболических движений.

Формулы (2.12) и (2.13) также показывают, что расстояние представляет функцию, удовлетворяющую условию аддитивности, т. е.

$$\varphi(x, y) + \varphi(y, z) = \varphi(x, z). \tag{2.14}$$

Чтобы убедиться в этом, разложим каждую из точек x, y, z по точкам t_1 и t_2:

$$x = \alpha_1 t_1 + \beta_1 t_2,$$
$$y = \alpha_2 t_1 + \beta_2 t_2,$$
$$z = \alpha_3 t_1 + \beta_3 t_2.$$

Тогда

$$\varphi(x, y) = c \ln\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1} : \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right) = c(\ln\beta_1 + \ln\alpha_2 - \ln\alpha_1 - \ln\beta_2)$$

$$\varphi(y, z) = c(\ln\beta_2 + \ln\alpha_3 - \ln\alpha_2 - \ln\beta_3)$$

$$\varphi(x, z) = c(\ln\beta_1 + \ln\alpha_3 - \ln\alpha_1 - \ln\beta_3),$$

откуда и следует равенство (2.14).

4. Из ф. (2.8) следует, что при каноническом нормировании

$$\cos\varphi = (xy).$$

Если координаты не канонические, то

$$\cos^2\varphi = \frac{(xy)^2}{(xx)(yy)}. \tag{2.15}$$

Из ф. (2.9) аналогично получаем:

$$\operatorname{ch}^2\varphi = \frac{(xy)^2}{(xx)(yy)}. \tag{2.16}$$

Положим

$$\frac{(xy)^2}{(xx)(yy)} = J. \tag{2.17}$$

J является инвариантом двух точек.

Формулы (2.14) и (2.15) показывают, что

$$J = \cos^2\varphi, \tag{2.18}$$

когда знаки (xx), (yy) и (zz) одинаковые, т. е. прямая $\{x, y\}$ не пересекает абсолют.

Инвариант

$$J = \operatorname{ch}^2\varphi, \tag{2.19}$$

когда знаки $(\boldsymbol{xx})$, $(\boldsymbol{yy})$ одинаковы и противоположны знаку $(\boldsymbol{zz})$, т. е. когда прямая $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$ пересекает абсолют.

В первом случае $0 < J < 1$, во втором $1 < J < \infty$.

5. Случай, когда $(\boldsymbol{zz}) = 0$ и прямая $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$, следовательно, касается абсолюта, надо рассматривать как предельный, когда точки $\boldsymbol{t}_1$ и $\boldsymbol{t}_2$ совпадают с точкой $\boldsymbol{z}$. Тогда, как из формулы (2.12), так и из формулы (2.13) следует, что $\varphi = 0$, так как в этом случае $D(\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 1$. Выражение (2.17) становится при этом неопределенным. Учитывая (2.18) и (2.19), естественно положить его равным 1.

6. Для дальнейшего будет полезно иметь выражение линейного элемента в гиперболической плоскости.

Пусть на плоскости задана кривая $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$. Предположим, что координаты всех точек кривой канонические. Отсюда следует, что

$$(\boldsymbol{xx}) = 1, \ (\boldsymbol{x}\dot{\boldsymbol{x}}) = 0, \ \ (\dot{\boldsymbol{x}}\dot{\boldsymbol{x}}) + (\boldsymbol{x}\ddot{\boldsymbol{x}}) = 0 \qquad (2.20)$$

(точки означают дифференцирование по t).

Обозначим расстояние между двумя бесконечно близкими точками кривой $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}$ через ds. Формула (2.15), выражающая расстояние между двумя точками, запишется в рассматриваемом нами случае в виде

$$\cos(ds) = (\boldsymbol{x}, \ \boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}).$$

Так как $\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \dot{\boldsymbol{x}}\,dt + \frac{1}{2}\ddot{\boldsymbol{x}}(dt)^2 + \dots$, то, учитывая (2.20), получаем:

$$\cos(ds) = 1 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}\ddot{\boldsymbol{x}})(dt)^2 + \dots$$

С другой стороны,

$$\cos(ds) = 1 - \frac{1}{2}(ds)^2 + \dots$$

Сопоставляя полученные выражения для $\cos(ds)$, имеем

$$ds^2 = -(\boldsymbol{x}\ddot{\boldsymbol{x}})\,dt,$$

или, в силу (2.20),

$$ds^2 = (\dot{\boldsymbol{x}}\dot{\boldsymbol{x}})(dt)^2 = (d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{x}) = d\boldsymbol{x}^2. \qquad (2.21)$$

Таким образом, неевклидова длина дуги в гиперболической плоскости будет

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{(\dot{x}\dot{x})}\, dt. \qquad (2.22)$$

Аналогичные результаты имеют место и для случая эллиптической плоскости.

§ 3. Стереографическая проекция сферы. Тетрациклические координаты точек и кругов в плоскости. Круговая геометрия в плоскости

1. От проективной плоскости, рассмотренной в предыдущих параграфах, перейдем теперь к проективному трехмерному пространству P_3. Основные положения проективной геометрии этого пространства вводятся по аналогии с основными положениями проективной геометрии плоскости.

Каждой точке пространства P_3 соответствует псевдовектор $\boldsymbol{x}(x_0, x_1, x_2, x_3)$ четырехмерного пространства. Будем называть координаты этого вектора, определенные с точностью до множителя, однородными координатами соответствующей точки пространства P_3.

Плоскость задается уравнением

$$u_0 x_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0, \qquad (3.1)$$

причем псевдоковектор $\boldsymbol{u}(u_0, u_1, u_2, u_3)$ называется ковектором плоскости.

Прямая в пространстве, как и прямая на плоскости, задается параметрическими уравнениями

$$\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{y} + \beta \boldsymbol{z}, \qquad (3.2)$$

где $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$ — точки на этой прямой.

Уравнение

$$\sum_{\alpha, \beta = 0}^{3} b_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta = 0$$

задает в пространстве поверхность второго порядка.

За счет проективного преобразования однородных координат пространства P_3, аналогичного преобразованию (1.1) в плоскости,

$$x_i = \sum_{j=0}^{3} p_i^j x_j^*, \quad i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ |p_i^j| \neq 0, \tag{3.3}$$

уравнение всякой действительной овальной поверхности 2-го порядка можно записать в виде

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0. \tag{3.4}$$

Введем сокращенное обозначение для квадратичной формы в левой части этого уравнения

$$(\boldsymbol{xx}) = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \tag{3.5}$$

Соответствующую ей билинейную форму, как и в плоском случае, будем называть полярным произведением точек $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$:

$$(\boldsymbol{yz}) = -y_0z_0 + y_1z_1 + y_2z_2 + y_3z_3. \tag{3.6}$$

Если ввести наряду с однородными и неоднородные декартовы координаты пространства ξ, η, ζ с помощью формул $\xi = \frac{x_2}{x_0}$, $\eta = \frac{x_3}{x_0}$, $\zeta = \frac{x_1}{x_0}$, то уравнение поверхности (3.4) примет вид

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1. \tag{3.7}$$

2. В пространстве проективные преобразования задаются формулами, аналогичными формулам (1.1′):

$$x_k^* = \sum_{l=0}^{3} p_k^l x_l, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \quad |p_k^l| \neq 0. \tag{3.8}$$

Примем некоторую поверхность 2-го порядка за абсолют K. Будем задавать абсолют K уравнением

$$(\boldsymbol{xx}) = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \tag{3.4}$$

и называть его иногда сокращенно сферой K.

Рассмотрим подгруппу проективных преобразований (3.8), которая переводит абсолют в себя. Эти преобразования называются *гиперболическими движениями*. Геометрия, соответствующая группе таких преобразований, будет *гиперболической геометрией* пространства P_3.

Для того чтобы иметь гиперболические движения, необходимо и достаточно, чтобы форма $-x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2$ после преобразования (3.8) отличалась от формы $-x_0^{*2}+x_1^{*2}+x_2^{*2}+x_3^{*2}$ только множителем. Это значит, что в преобразованной форме коэффициенты при x_1^{*2}, x_2^{*2}, x_3^{*2} должны иметь общее значение h, коэффициент при x_0^{*2} должен быть равен $-h$, а все остальные коэффициенты должны быть равны нулю. В силу однородности тетрациклических координат множитель h можно свести к 1.

Поэтому, если положить

$$e^{ij}=-p_0^i p_0^j+p_1^i p_1^j+p_2^i p_2^j+p_3^i p_3^j, \tag{3.9}$$

то условия инвариантности уравнения $(\boldsymbol{xx})=0$ запишутся в виде

$$\begin{gathered}-e^{00}=e^{11}=e^{22}=e^{33}=1,\\ e^{ij}=0 \text{ при } i\neq j.\end{gathered} \tag{3.10}$$

Этих условий 10, всех коэффициентов 16. Таким образом, группа гиперболических движений шестичленная. Будем обозначать ее H_6.

Заметим, что рассматриваемая матрица коэффициентов преобразований $\|p_i^j\|$ переходит в ортогональную, если в ней первую вертикаль и первую горизонталь умножить одновременно на i. Поэтому, как и в случае ортогональной матрицы, система (3.10) может быть заменена эквивалентной системой; именно, если положить

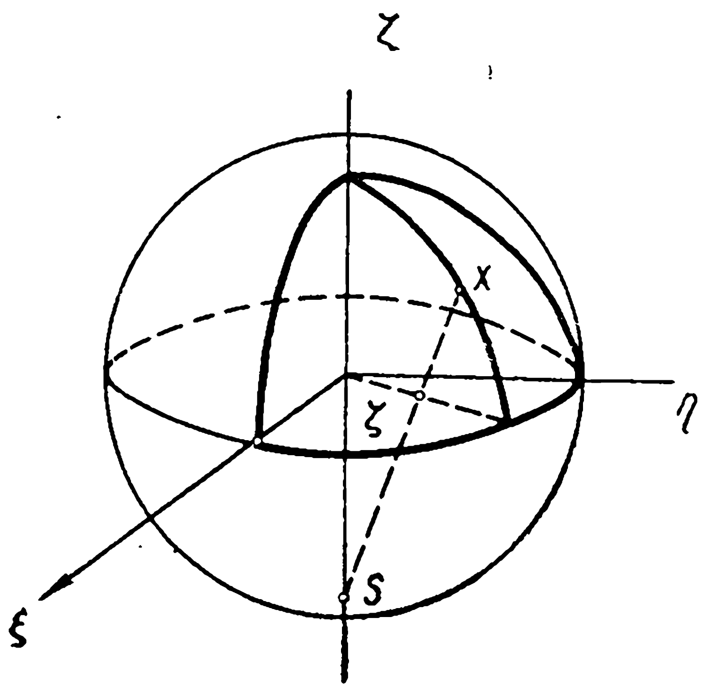
$$e_{ij}=-p_i^0 p_j^0+p_i^1 p_j^1+p_i^2 p_j^2+p_i^3 p_j^3, \tag{3.11}$$

то вместо уравнений (3.10) можно записать уравнения

$$\begin{gathered}-e_{00}=e_{11}=e_{22}=e_{33}=1,\\ e_{ij}=0 \text{ при } i\neq j.\end{gathered} \tag{3.12}$$

3. С помощью абсолютной сферы K установим соответствие между точками пространства и точками некоторой плоскости, принимаемой за основную. Пусть эта плоскость является экваториальной плоскостью сферы и совпадает с координатной

плоскостью ξ, η. Будем проектировать точки сферы K из южного полюса s на эту плоскость. Точке x сферы ставится в соответствие точка ζ плоскости. *Рассматриваемая проекция называется стереогра-*



фической. Она устанавливает взаимно-однозначное непрерывное соответствие точек сферы и плоскости, если условиться дополнительно, что точке s соответствует бесконечно удаленная точка плоскости. *Плоскость, имеющая одну бесконечно-удаленную (или несобственную) точку называется конформной.* Будем обозначать ее M_2.

Найдем точку $x(x_0, x_1, x_2, x_3)$ сферы, если задана соответствующая точка плоскости $\zeta(1, 0, \xi, \eta)$ и точке южного полюса соответствует псевдовектор s (1, —1, 0, 0), или s (α, $-\alpha$, 0, 0).

Точка x лежит на сфере, поэтому ее координаты удовлетворяют уравнению (3.4). Кроме того, так как точки s, x, ζ лежат на одной прямой, то все определители 3-го порядка матрицы

$$\left\| \begin{matrix} x_0, & 1, & 1 \\ x_1, & -1, & 0 \\ x_2, & 0, & \xi \\ x_3, & 0, & \eta \end{matrix} \right\|$$

должны быть равны нулю, т. е.

$$(x_0 + x_1)\xi - x_2 = 0 \tag{3.13}$$

$$x_2\eta - x_3\xi = 0. \tag{3.14}$$

Из уравнений (3.4), (3.13), (3.14) имеем:

$$\begin{aligned} x_0 &= \rho\,\frac{1 + \xi^2 + \eta^2}{2} \\ x_1 &= \rho\,\frac{1 - (\xi^2 + \eta^2)}{2} \\ x_2 &= \rho\xi \\ x_3 &= \rho\eta, \end{aligned} \tag{3.15}$$

где ρ — произвольный множитель. Чтобы получить координаты точки s, надо положить, что ξ, $(\eta) \to \infty$, $\rho \to 0$, $\rho\xi\,(\rho\eta) \to 0$, а $\rho\xi^2\,(\rho\eta^2)$ конечны.

Так как между точками x сферы и точками ζ плоскости установлено соответствие, определенное стереографической проекцией, то однородные координаты x_0, x_1, x_2, x_3 точки сферы можно рассматривать как координаты соответствующей точки на плоскости. *Координаты x_0, x_1, x_2, x_3 называют тетрациклическими координатами точки плоскости.* Они получаются из обычных координат ξ, η по формулам (3.15). Это однородные координаты, которые кроме того связаны соотношением (3.4).

Стереографическая проекция устанавливает соответствие не только между точками сферы и плоскости, но и между точками вне сферы и некоторыми геометрическими образами на плоскости. Рассмотрим это соответствие.

Для точек $y\,(y_0, y_1, y_2, y_3)$ вне сферы $(yy) > 0$; полярная плоскость точки y относительно сферы K пересекает сферу по кругу. Таким образом, каждой точке вне сферы соответствует определенный круг на сфере. Большие круги при этом надо считать соответствующими несобственным точкам пространства. Каждому кругу на сфере в стереографической проекции соответствует на плоскости круг или прямая. Действительно: образ круга на сфере имеет на плоскости в тетрациклических координатах x_0, x_1,

x_2, x_3, то же уравнение, что и сам круг на сфере:

$$(yx) = 0. \qquad (3.16)$$

Подставим формулы (3.15) в это уравнение и получим:

$$(y_0 + y_1)(\xi^2 + \eta^2) - 2y_2\xi - 2y_3\eta = y_1 - y_0. \qquad (3.16')$$

Если $y_0 + y_1 \neq 0$, то это уравнение круга, если $y_0 + y_1 = 0$, то уравнение прямой, которую можно рассматривать как предельный случай круга — круг бесконечно большого радиуса. Прямая получается при проектировании на плоскость круга, проходящего через южный полюс сферы.

Таким образом, посредством стереографической проекции устанавливается соответствие между точками вне сферы и кругами на плоскости. *Координаты y_0, y_1, y_2, y_3 точки y называются тетрациклическими координатами круга в плоскости.* Если $y_0 + y_1 = 0$ и круг (3.16′) становится прямой $y_2\xi + y_3\eta = y_0$, то величины y_2, y_3, y_0 превращаются в обыкновенные однородные координаты прямой. В общем случае ($y_0 + y_1 \neq 0$) из уравнения (3.16′) можно найти выражения координат центра круга ξ_0, η_0 и радиус R_0 через тетрациклические координаты этого круга:

$$\xi_0 = \frac{y_2}{y_0 + y_1}, \quad \eta_0 = \frac{y_3}{y_0 + y_1},$$

$$R^2 = \frac{-y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}{(y_0 + y_1)^2}. \qquad (3.17)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} y_0 &= \sigma \frac{1 + (\xi_0^2 + \eta_0^2 - R_0^2)}{2} \\ y_1 &= \sigma \frac{1 - (\xi_0^2 + \eta_0^2 - R_0^2)}{2} \\ y_2 &= \sigma\xi \\ y_3 &= \sigma\eta, \end{aligned} \qquad (3.18)$$

где σ — произвольный множитель.

Если точка y берется на сфере, то $(yy)=0$ и круг (3.16′) превращается в точку. В формулах (3.18) надо положить $R_0=0$, и тогда эти формулы превращаются в формулы (3.15). Прежний случай стереографического проектирования точек сферы выступает теперь как частный случай.

Таким образом, *стереографическая проекция устанавливает соответствие между точками трехмерного проективного пространства P_3, находящимися на сфере или вне ее, и кругами в конформной плоскости. При этом в число кругов включаются круги нулевого радиуса (точки) и круги бесконечно большого радиуса (прямые).*

Для точек внутри шара $(yy)<0$ и стереографическая проекция смысла не имеет, так как у таких точек полярная плоскость не пересекает сферу и не существует никаких действительных точек на плоскости, соответствующих этим внутренним точкам сферы. Из формул (3.18) следует, что в этом случае $R_0^2<0$. Можно считать, что точкам внутри сферы K соответствуют круги чисто мнимого радиуса.

4. При стереографической проекции сферы K на плоскость группе гиперболических движений H_6 пространства P_3 соответствует группа M, которая круги и прямые на плоскости M_2 переводит в круги и прямые. Точки при этом переходят в точки.

Преобразования группы M задаются аналитически также формулами (3.8), но величины x_i надо рассматривать как тетрациклические координаты кругов на плоскости. *Группу M будем называть группой круговых преобразований на плоскости, а порождаемую ими геометрию — круговой.*

Группа H_6 индуцирует на сфере K группу точечных преобразований сферы в себя, причем круги переходят в круги. При этих преобразованиях точка s южного полюса может перейти в любую другую точку сферы. Отсюда следует, что при соответствующих круговых преобразованиях в плоскости M_2 несобственная точка может быть переведена в любую собственную точку, и, следовательно, прямые (круги, проходящие через несобственную точку), вообще говоря, переходят в круги.

5. Рассмотрим такую подгруппу круговых преобразований, которая сохраняет несобственную точку, т. е. переводит прямые в прямые. Докажем, что рассматриваемые преобразования представляют преобразования подобия (гомотетия и евклидово движение). Действительно: круговые преобразования — это преобразования вида (3.8) при условиях (3.10) или (3.12). Условия, что несобственная точка $(\alpha, -\alpha, 0, 0)$ переходит в несобственную $(1, -1, 0, 0)$, будут следующие:

$$\begin{aligned} &p_0^0 - p_0^1 + p_1^0 - p_1^1 = 0 \\ &p_2^0 = p_2^1 \\ &p_3^0 = p_3^1. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Из условий (3.19) и (3.10) или (3.12) получаем, что

$$\begin{aligned} &p_2^{2^2} + p_2^{3^2} = 1 \\ &p_3^{2^2} + p_3^{3^2} = 1 \\ &p_2^2 p_3^2 + p_2^3 p_3^3 = 0, \end{aligned} \tag{3.20}$$

а также, что

$$\begin{aligned} &p_0^2 + p_1^2 = 0 \\ &p_0^3 + p_1^3 = 0. \end{aligned} \tag{3.21}$$

(В первом случае рассматриваем равенства $e_{22} = e_{33} = 1$, $e_{23} = 0$ и $(3.19_{1,2})$; во втором — равенства $e^{01} = e^{12} = 0$; $e^{03} = e^{13} = 0$ и (3.19)). Записываем преобразования (3.8) в декартовых координатах ξ, η, воспользовавшись формулами (3.15):

$$\rho \frac{1 + \xi^2 + \eta^2}{2} = p_0^0 \frac{1 + \xi^{*2} + \eta^{*2}}{2} + p_0^1 \frac{1 - (\xi^{*2} + \eta^{*2})}{2} + p_0^2 \xi^* + p_0^3 \eta^*;$$

$$\rho \frac{1 - (\xi^2 + \eta^2)}{2} = p_1^0 \frac{1 + \xi^{*2} + \eta^{*2}}{2} + p_1^1 \frac{1 - (\xi^{*2} + \eta^{*2})}{2} + p_1^2 \xi^* + p_1^3 \eta^*; \tag{3.22}$$

$$\rho\xi = p_2^0 \frac{1+\xi^{*2}+\eta^{*2}}{2} + p_2^1 \frac{1-(\xi^{*2}+\eta^{*2})}{2} +$$
$$+ p_2^2 \xi^* + p_2^3 \eta^*;$$
$$\rho\eta = p_3^0 \frac{1+\xi^{*2}+\eta^{*2}}{2} + p_3^1 \frac{1-(\xi^{*2}+\eta^{*2})}{2} +$$
$$+ p_3^2 \xi^* + p_3^3 \eta^*.$$

Учитывая условия ($3.19_{2,3}$), можно переписать последние два из этих равенств в виде:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{\rho}(p_2^2 \xi^* + p_2^3 \eta^* + p_2^0) \\ \eta &= \frac{1}{\rho}(p_3^2 \xi^* + p_3^3 \eta^* + p_3^0). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Складывая первые два равенства (3.22) и принимая во внимание условия (3.19_1), (3.21), имеем:

$$\rho = \frac{1}{2}(p_0^0 + p_0^1 + p_1^0 + p_1^1) = p_0^0 + p_1^0 = \text{const}. \tag{3.24}$$

Формулы (3.23) являются формулами преобразования точек в плоскости, заданных в неоднородных декартовых координатах. Эти преобразования линейны, матрица коэффициентов

$$\begin{Vmatrix} p_2^2 & p_2^3 \\ p_3^2 & p_3^3 \end{Vmatrix}$$

ортогональная, как это следует из (3.20), коэффициент $\frac{1}{\rho}$ постоянный, как это вытекает из (3.24).

Таким образом, доказано, что преобразования (3.23) представляют преобразования подобия.

6. Для гиперболической геометрии в пространстве имеют место те же предложения и формулы, что и для гиперболической геометрии в плоскости, которые были отмечены в § 1 и 2. Формула (1.19) для двойного отношения 4-х точек на круге применима и к кругу, лежащему на сфере. При гиперболических движениях это двойное отношение не меняется. Отсюда следует, что двойное отношение 4-х точек на круге в плоскости M_2 остается инвариантным при круговых преобразованиях.

§ 4. Углы между кругами в конформной плоскости

1. В § 2 были получены инварианты гиперболической геометрии на плоскости, связанные с расстоянием между двумя точками. Эти инварианты имеют место и для гиперболической геометрии трехмерного пространства. Для дальнейшего наиболее важен случай, когда точки x и y лежат вне K и прямая, их соединяющая, не пересекает K. Тогда, согласно (2:17), (2.18),

$$J = \frac{(xy)^2}{(xx)(yy)} = \cos^2\varphi. \tag{4.1}$$

Дадим истолкование инварианту J в плоской круговой геометрии, соответствующей гиперболической геометрии P_3. Внешним по отношению к сфере точкам x и y соответствуют круги на плоскости. Так как прямая, соединяющая x и y, не пересекает сферу, то соответствующие круги на плоскости пересекаются. Действительно, в этом случае прямая, являющаяся полярой прямой $\{x, y\}$, пересекает сферу. Но она является осью пучка всех плоскостей, полярных точкам прямой $\{x, y\}$. Следовательно, круги на сфере, соответствующие точкам x, y, а также и соответствующие им круги в конформной плоскости, пересекаются.

Координаты точек x и y являются тетрациклическими координатами кругов. По формулам (3.18) выразим эти координаты через координаты центра и радиус круга и подставим в выражение (4.1) для J. Пусть точке x соответствует круг (ξ_0, η_0, R_0), точке y — $(\tilde{\xi}_0, \tilde{\eta}_0, \tilde{R}_0)$. Тогда

$$J = \frac{(-x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2}{(-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(-y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)} =$$

$$= \left[\frac{(\xi_0 - \tilde{\xi}_0)^2 + (\eta_0 - \tilde{\eta}_0)^2 - (R_0^2 + \tilde{R}_0^2)}{2R_0\tilde{R}_0}\right].$$

Для пересекающихся кругов выражение в скобках представляет угол φ между кругами.

Действительно:

$$M_1M_2^2 = R_0^2 + \tilde{R}_0^2 - 2R_0\tilde{R}_0 \cos\psi =$$
$$= (\xi_0 - \tilde{\xi}_0)^2 + (\eta_0 - \tilde{\eta}_0)^2,$$

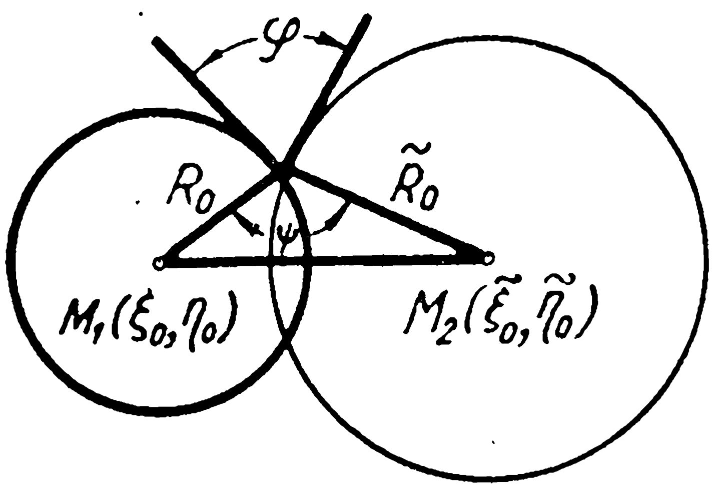
откуда

$$-\cos\psi = \frac{(\xi_0 - \tilde{\xi}_0)^2 + (\eta_0 - \tilde{\eta}_0)^2 - (R_0^2 + \tilde{R}_0^2)}{2R_0\tilde{R}_0}.$$

Так как $\psi = \pi - \varphi$, то $-\cos\psi = \cos\varphi$.

Таким образом,

$$J = \frac{(xy)^2}{(xx)(yy)} = \cos^2\varphi, \tag{4.2}$$



т. е. *инвариант J двух кругов представляет квадрат косинуса угла между этими кругами.*

Сравнивая формулы (4.1) и (4.2), заключаем, что угол между двумя кругами на плоскости равен неевклидову расстоянию между точками в пространстве, соответствующими этим кругам в стереографической проекции. При этом должно иметь место ограничение $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Условие ортогональности двух кругов получается в виде

$$(xy) = 0, \tag{4.3}$$

т. е. как условие полярной сопряженности двух соответствующих кругам точек.

Для двух касающихся кругов в плоскости, соответствующих паре точек в пространстве, у которых соединяющая их прямая касается сферы, $\varphi = 0$, т. е. $J = \cos^2 \varphi = 1$ и, следовательно,

$$(\boldsymbol{xx})(\boldsymbol{yy}) - (\boldsymbol{xy})^2 = 0. \tag{4.4}$$

Один из кругов, например $\boldsymbol{x}$, может обратиться в точку, и это будет граничным случаем касания. При этом $(\boldsymbol{xx}) = 0$ и $(\boldsymbol{xy}) = 0$. Таким образом, *равенство* (4.3) *в случае, когда один из кругов превращается в точку, выражает условие инцидентности точки и круга.* Для двух точек $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ равенство $(\boldsymbol{xy}) = 0$ имеет место, только если эти точки совпадают.

Аналогично тому, как $J = \cos^2 \varphi$, где φ — расстояние между точками, является инвариантом в гиперболической геометрии P_3, так и $J = \cos^2 \varphi$, где φ — угол между кругами в M_2, является инвариантом в круговой геометрии плоскости M_2, т. е. *при круговых преобразованиях углы между окружностями сохраняются. Круговые преобразования относятся, таким образом, к конформным преобразованиям.*

2. Покажем, что *стереографическая проекция отображает поверхность шара K на плоскость с сохранением углов,* т. е. угол между двумя кругами на сфере равен углу между двумя кругами на плоскости, соответствующими им в стереографической проекции.

Вращением шара вокруг центра (гиперболическое движение) одну из точек пересечения кругов можно перевести в точку $\boldsymbol{s}$. Этому вращению шара соответствует в плоскости мёбиусовское преобразование, при котором углы между кругами не меняются. Поэтому достаточно доказать сохранение углов при стереографическом проектировании только для кругов, проходящих через $\boldsymbol{s}$. Такие круги при проектировании из $\boldsymbol{s}$ переходят в прямые, параллельные касательным к кругам в точке $\boldsymbol{s}$. Угол между кругами, равный углу между касательными к ним в точке пересечения, будет равен углу между соответствующими прямыми, так как оба угла имеют параллельные стороны. Таким образом, сохранение углов при стереографическом проектировании доказано.

3. Образом, двойственным точке, в гиперболической геометрии пространства является плоскость. За угол между двумя плоскостями принимают неевклидово расстояние их полюсов. Из предыдущего следует, что если плоскости пересекают сферу по двум пересекающимся кругам, то углом между плоскостями будет угол между кругами.

§ 5. Пучки кругов в конформной плоскости

1. В пространстве для прямой Θ, определенной точками p и q и заданной уравнением

$$t = \alpha p + \beta q, \tag{5.1}$$

можно построить полярно сопряженную ей прямую $\tilde{\Theta}$ — линию пересечения плоскостей, полярных точкам первой прямой относительно абсолюта K. Прямая $\tilde{\Theta}$ также определится двумя своими точками v и w и запишется уравнением

$$u = \gamma v + \delta w. \tag{5.2}$$

Каждая точка t прямой Θ полярно сопряжена каждой точке u прямой $\tilde{\Theta}$, т. е.

$$(tu) = 0. \tag{5.3}$$

В частности, имеют место равенства

$$(pv) = (pw) = (qv) = (qw) = 0. \tag{5.3'}$$

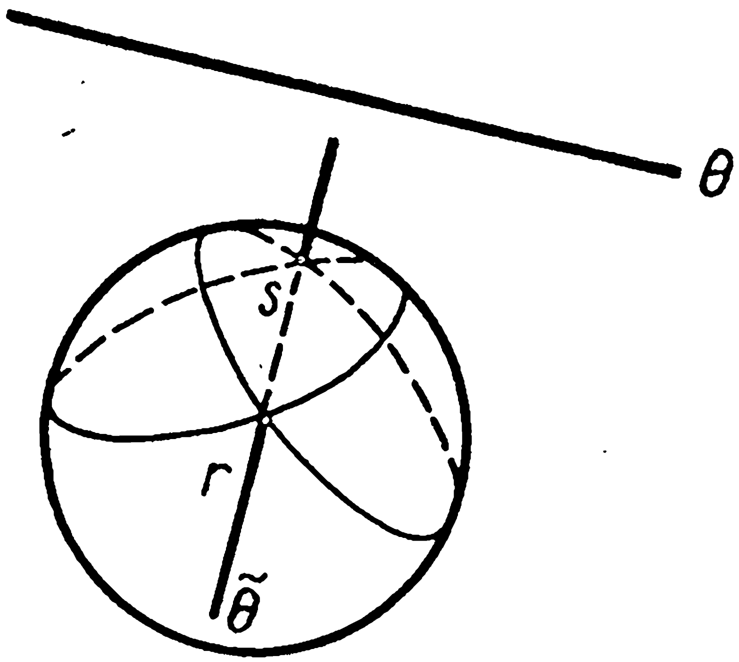
Прямая, не пересекающая абсолют, называется эллиптической, пересекающая его — гиперболической, касающаяся к нему — параболической.

Если дана прямая Θ, не пересекающая абсолют K, то, чтобы построить $\tilde{\Theta}$, надо через Θ провести плоскости, касательные к абсолюту K. Прямая, соединяющая точки касания, и будет прямой $\tilde{\Theta}$ [11, стр. 529]. Отсюда сразу следует, что если Θ не пересекает абсолют, то прямая $\tilde{\Theta}$ пересекает его в двух точках r и s. Из (5.3) следует, что

$$(tr) = (ts) = 0. \tag{5.4}$$

Найдем условие, что среди точек u на прямой $\tilde{\Theta}$ есть точки, общие со сферой. Если точка u принадлежит сфере, то соответствующее отношение $\frac{\gamma}{\delta}$ найдется из уравнения

$$(uu) = \gamma^2 (vv) + 2\gamma\delta (vw) + \delta^2 (ww) = 0.$$



Уравнение имеет

а) два действительных решения, если

$$(vw)^2 - (vv)(ww) > 0; \tag{5.5}$$

б) два комплексно-сопряженных решения, если

$$(vw)^2 - (vv)(ww) < 0; \tag{5.6}$$

в) одно решение, если

$$(vw)^2 - (vv)(ww) = 0. \tag{5.7}$$

Для прямой $\tilde{\Theta}$, пересекающей K в двух точках, имеем первый случай (5.5). Точки пересечения r и s можно представить векторами

$$r = [-(vw) + \sqrt{(vw)^2 - (vv)(ww)}]\, v + (vv)\, w$$

$$s = [-(vw) - \sqrt{(vw)^2 - (vv)(ww)}]\, v + (vv)\, w.$$

Так как прямая Θ (5.1) не пересекает сферу, то

$$(pq)^2 - (pp)(qq) < 0.$$

Если прямая, заданная уравнением (5.2), касается абсолюта K, и точка $\boldsymbol{v}$ является точкой касания, т. е.

$$(\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}) = 0, \tag{5.8}$$

то, в силу (5.7), будет иметь место равенство

$$(\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}) = 0. \tag{5.9}$$

Из (5.8) и (5.9) следует, что в рассматриваемом случае

$$(\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}) = 0, \tag{5.10}$$

т. е. любая точка касательной сопряжена точке касания.

Прямая, сопряженная касательной к абсолюту прямой, также является касательной.

2. В плоскости M_2 каждой точке прямой P_3 соответствует круг. *Совокупность кругов, соответствующих всем точкам прямой, называется пучком кругов.* Если прямая эллиптическая, то пучок кругов называется *эллиптическим*; если гиперболическая, то *гиперболическим*; если параболическая, то и пучок называется *параболическим.*

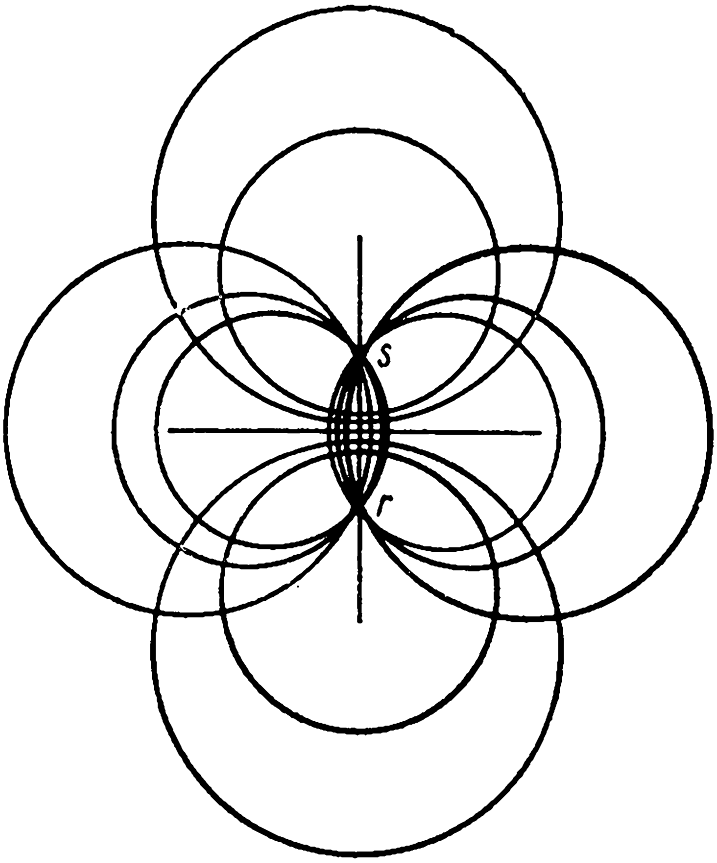
Все круги $\boldsymbol{t}$ эллиптического пучка имеют две общие точки $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{s}$ — вершины пучка. Это следует из равенств (5.4).

Все круги $\boldsymbol{u}$ гиперболического пучка не имеют общих точек. Точки $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{s}$ входят в этот пучок как круги нулевого радиуса.

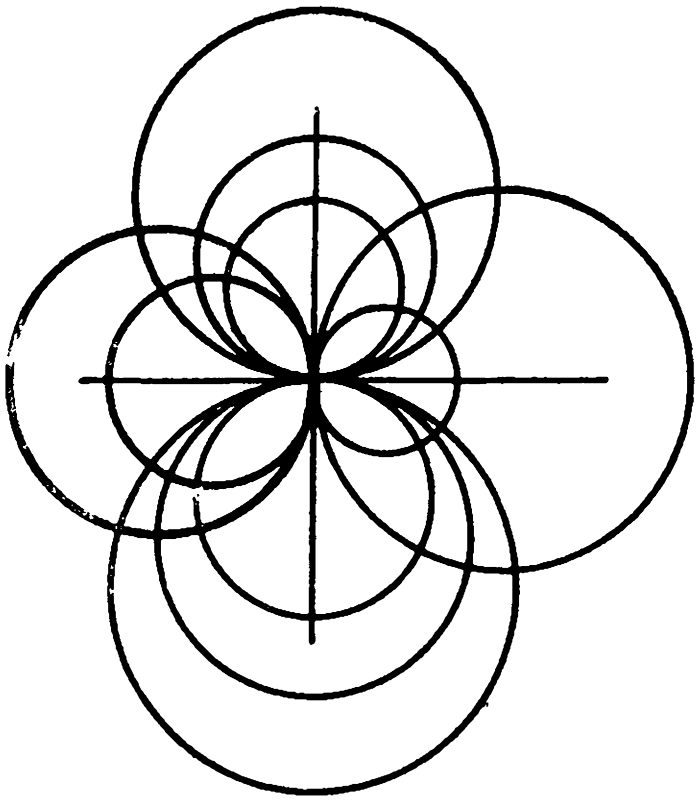
Пучки, соответствующие двум полярно сопряженным прямым, также называются сопряженными. У всякого гиперболического пучка есть сопряженный ему эллиптический, и обратно. Круги первого пучка ортогональны кругам второго.

Все круги $\boldsymbol{u}$ параболического пучка, в силу (5.10), имеют одну общую точку, в которой касаются друг друга. У всякого параболического пучка есть сопряженный ему, тоже параболический, пучок, круги которого ортогональны кругам первого пучка.

Для пучка, заданного уравнением (5.2), где $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ — произвольные круги пучка, аналитические признаки эллиптичности, гиперболичности, параболичности характеризуются неравенствами (5.5), (5.6) или равенством (5.7) соответственно.



Сопряженные эллиптический и гиперболический пучки.



Сопряженные параболические пучки.

§ 6. Инверсия

1. Рассмотрим пример гиперболического движения пространства P_3, так называемую *полярную гомологию*.

Инволюционной гомологией называется такое отображение точек проективного пространства на себя, которое задано, если задана некоторая точка $\boldsymbol{y}$ — центр гомологии и плоскость q — плоскость гомологии. Всякая пара соответствующих точек $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}^*$ лежит на прямой, проходящей через центр гомологии, и удовлетворяет условию:

$$D(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{n},\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}^*) = -1, \tag{6.1}$$

где $\boldsymbol{n}$ — точка пересечения прямой $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$ и плоскости q.

Гомология называется полярной, если q представляет плоскость, полярную точке $\boldsymbol{y}$ относительно некоторой поверхности 2-го порядка.

Из условия (6.1) следует, что точкам поверхности K соответствуют точки этой же поверхности. Отсюда следует, что полярная гомология представляет гиперболическое движение в P_3 с абсолютом K.

Получим аналитическое выражение преобразования полярной гомологии.

Пусть $\boldsymbol{x}$ — произвольная точка вне абсолюта K. Она лежит на прямой $\{\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{n}\}$, где $\boldsymbol{n}$ — точка на плоскости q. Прямая $\{\boldsymbol{y}, \boldsymbol{n}\}$ задается уравнением $\boldsymbol{t} = \alpha \boldsymbol{y} + \beta \boldsymbol{n}$. Если точке $\boldsymbol{x}$ соответствуют параметры α_1, β_1, то точку $\boldsymbol{x}^*$, гармонически сопряженную ей, можно задать параметрами $-\alpha_1$, β_1 (см. (1.5), где $\sigma = -1$):

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{y} + \beta_1 \boldsymbol{n}$$

$$\boldsymbol{x}^* = -\alpha_1 \boldsymbol{y} + \beta_1 \boldsymbol{n}. \tag{6.1'}$$

Из второго уравнения, в силу условия $(\boldsymbol{y}\boldsymbol{n}) = 0$, имеем, что $\alpha_1 = -\dfrac{(\boldsymbol{x}^* \boldsymbol{y})}{(\boldsymbol{y}\boldsymbol{y})}$. Исключая из уравнений (6.1′) β_1 и подставляя значение α_1, получаем:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^* - 2\frac{(\boldsymbol{x}^* \boldsymbol{y})}{(\boldsymbol{y}\boldsymbol{y})}\boldsymbol{y}, \tag{6.2}$$

или

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{y}\boldsymbol{y})\,\boldsymbol{x}^* - 2(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{y})\,\boldsymbol{y}, \tag{6.3}$$

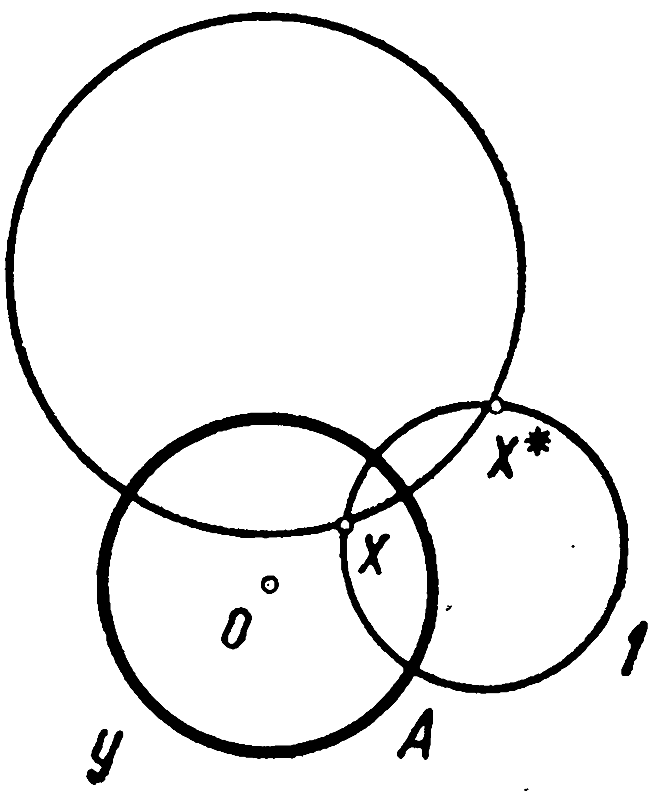
так как α_1 и β_1 определяются с точностью до общего множителя.

При фиксированном y полученное преобразование линейно относительно x^*. Оно таково, что из $(xx) = 0$ следует, что $(x^*x^*) = 0$, и поэтому сферу переводит в сферу.

Всякое гиперболическое движение состоит из конечного числа гомологий [2, стр. 170].

2. Покажем, что *в конформной плоскости каждому преобразованию вида* (6.2) *соответствует инверсия относительно круга y, который считается основным.*

Пусть x — точка на сфере. В плоскости ей также соответствует точка. Прямой пространства, проходящей через точки y, x, x^*, соответствует на плоскости пучок кругов, в который точки x и x^* входят как круги нулевого радиуса. Пучок, сопряженный этому пучку, состоит из кругов, проходящих через точки x и x^*. Эти круги ортогональны кругам первого пучка, в том числе и кругу y. Поэтому, чтобы найти точку x^*, зная x и y, надо провести через x два круга, ортогонально пересекающие круг y. Вторая точка



пересечения этих кругов и будет точка x^*. При таком построении

$$Ox \cdot Ox^* = R^2, \tag{6.4}$$

где $R = OA$ — радиус круга y, а O — центр круга, т. е. точка x^* получается из точки x преобразованием обратных радиусов, или инверсии [3, стр. 200]. Доказательство формулы (6.4) следует из того, что по отношению к кругу, проходящему через точки x, x^* ортогонально к кругу y, отрезки Ox и Ox^* представляют отрезки секущей и ее внешней части, а $OA = R$ является касательной.

Если основной круг y имеет в неоднородных координатах уравнение $x^2 + y^2 - r^2 = 0$, а координаты x и x^* будут ξ, η и ξ_1, η_1, то

$$\xi_1 = r^2 \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \quad \eta_1 = r^2 \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2}.$$

Если круг инверсии вырождается в прямую, то точки x и x^* становятся точками, симметричными относительно этой прямой. *Преобразование инверсии поэтому можно назвать преобразованием симметрии относительно круга.*

Так же, как группу гиперболических движений можно получить с помощью конечного числа полярных гомологий (6.2), так и *группу круговых преобразований можно получить с помощью конечного числа преобразований инверсии, или симметрии относительно круга.*

Если в формуле (6.2) x — точка вне сферы K, то соответствующее преобразование в плоскости будет преобразованием инверсии круга x относительно круга y.

Преобразованием инверсии с $(yy) \neq 0$ можно перевести любую точку x плоскости в несобственную. Для этого в качестве y надо взять круг с центром в точке x. Отсюда следует, что и любой круг x можно преобразованием инверсии перевести в прямую. Для этого надо в качестве y взять круг с центром в любой точке данного круга x.

Если даны два сопряженных пучка кругов: эллиптический и гиперболический, то, поместив центр инверсии в одну из основных точек пучка, переведем с помощью инверсии эллиптический пучок в пучок прямых. Гиперболический пучок перейдет при этом в пучок концентрических кругов, ортогональных этим прямым.

Если даны два сопряженных параболических пучка кругов, то, поместив центр инверсии в общую точку всех кругов обоих пучков, переведем с помощью преобразования инверсии первый пучок кругов в пучок параллельных прямых, а второй — в пучок прямых, ортогональных прямым первого пучка.

3. Формула (6.2) не теряет смысла и в том случае, когда y — внутренняя точка относительно K. Правда, в этом случае точке y не соответствует никакого действительного круга в плоскости M_2. Преобразование принято называть в этом случае инверсией относительно мнимого круга, или эллиптической инверсией, в отличие от гиперболической инверсии, рассмотренной выше. Если y — точка сферы K, то, поскольку $(yy) = 0$, формула (6.3) принимает вид

$$x = -2(x^*y)\,y,$$

т. е. рассматриваемое преобразование относит всякой точке или кругу x одну и ту же точку y. Это параболическая инверсия.

§ 7. Гиперболическая, эллиптическая и евклидова геометрии как геометрии подгрупп круговых преобразований

1. В § 2 было показано, как, выделяя в плоскости некоторые образы в качестве абсолютных, можно рассмотреть неевклидовы (гиперболическую и эллиптическую) и евклидову геометрии как геометрии, соответствующие подгруппам проективных преобразований плоскости. Следуя Пуанкаре, их можно рассматривать и как геометрии, соответствующие подгруппам круговых преобразований в M_2, если выделить некоторые образы в качестве абсолютных.

Рассмотрим подгруппу круговых преобразований, переводящих в себя некоторый круг $\boldsymbol{k}$. В пространстве P_3 кругу $\boldsymbol{k}$ соответствует некоторая точка $\boldsymbol{k}$, которая лежит вне абсолюта, если круг $\boldsymbol{k}$ действительный, или внутри него, если круг мнимый. Поэтому рассматриваемая подгруппа изоморфна такой подгруппе неевклидовых движений P_3, которая сохраняет некоторую точку этого пространства. Но если эта точка сохраняется, то сохраняется и ее полярная плоскость, а та кривая Q, по которой она пересекает абсолют K, переходит в себя. Отсюда следует, что подгруппа круговых преобразований, переводящих в себя некоторый круг $\boldsymbol{k}$, изоморфна группе неевклидовых движений двумерного пространства Клейна с абсолютом Q.

Пусть круг $\boldsymbol{k}$ действительный. Тогда и кривая Q действительная, а *группа круговых преобразований, переводящих в себя действительный круг, изоморфна группе гиперболических движений плоскости.*

Рассмотрим, какими образами плоскости M_2 изображаются точки и прямые гиперболической плоскости с абсолютом Q.

Точка гиперболической плоскости $\boldsymbol{m}$, т. е. внутренняя точка абсолюта Q, имеет поляру — прямую μ, которая не пересекает абсолют Q. Этой прямой соответствует в плоскости M_2 эллиптический пучок кругов, который определяется заданием двух общих точек $\boldsymbol{m}_1$ и $\boldsymbol{m}_2$ всех своих кругов. Каждая точка $\boldsymbol{z}$ прямой μ лежит в плоскости, полярной точке $\boldsymbol{k}$, и поэтому удовлетворяет условию $(\boldsymbol{kz}) = 0$, а это значит, что всякий круг рассматриваемого нами пучка в плоскости M_2 ортогонален кругу $\boldsymbol{k}$. Отсюда следует, что точки $\boldsymbol{m}_1$ и $\boldsymbol{m}_2$ находятся в инверсии относительно круга $\boldsymbol{k}$.

Таким образом, имеем: *точка гиперболической плоскости изображается парой точек конформной плоскости, находящихся в инверсии относительно круга* $\boldsymbol{k}$.

Прямая ν гиперболической плоскости, т. е. прямая, пересекающая абсолют Q, имеет своим полюсом некоторую точку $\boldsymbol{n}$, расположенную вне абсолюта, причем $(\boldsymbol{kn}) = 0$. Точке $\boldsymbol{n}$ соответствует в M_2 круг $\boldsymbol{n}$, который, в силу условия $(\boldsymbol{kn}) = 0$, ортогонален кругу $\boldsymbol{k}$.

Следовательно, *прямая гиперболической плоскости изображается в* M_2 *кругом, ортогональным инвариантному кругу* $\boldsymbol{k}$.

Аналогично рассуждая, получаем, что *круг гиперболической плоскости изображается в* M_2 *парой кругов, находящихся в инверсии относительно круга* $\boldsymbol{k}$.

При подходящем выборе фиксированной точки $\boldsymbol{k}$ и подходящем нормировании координат точки гиперболической плоскости координаты x_0, x_2, x_3 этой точки превращаются в обычные однородные координаты.

Действительно: пусть точка k имеет координаты $k(0, 1, 0, 0)$, а $m(x_0, x_1, x_2, x_3)$ — произвольная точка внутри абсолюта в плоскости, полярной k. В силу условия полярной сопряженности точки k и плоскости, в которой лежит точка m,

$$(mk) = x_1 = 0. \tag{7.1}$$

Следовательно, плоскость, полярная k, совпадает с плоскостью, на которую производится стереографическое проектирование. В этой плоскости введены декартовы координаты ξ, η точки. Формулы (3.15) связывают эти координаты с однородными координатами точки m как точки P_3. Из этих формул и условия (7.1) следует, что $\xi^2 + \eta^2 = 1$, $x_0 = \rho$, $x_2 = \rho\xi$, $x_3 = \rho\eta$, т. е. $\xi = \frac{x_2}{x_0}$, $\eta = \frac{x_3}{x_0}$, или, что x_0, x_2, x_3 — обычные однородные координаты точки в плоскости.

Круг $\xi^2 + \eta^2 = 1$ является образом точки k в плоскости M_2.

Точке m соответствуют в плоскости M_2 две точки — m_1 и m_2, находящиеся в инверсии относительно круга k. Они являются стереографической проекцией точек пересечения прямой $t = \alpha m + \beta k$ с абсолютом. Эти точки определяются из условия:

$$(\alpha m + \beta k)^2 = \alpha^2 (mm) + \beta^2 (kk) = 0.$$

Так как $(kk) = 1$, $(mm) < 0$, то $\frac{\alpha}{\beta} = \pm \frac{1}{\sqrt{-(mm)}}$.

Значит,

$$\begin{aligned} m_1 &= m + \sqrt{-(mm)}\,k \\ m_2 &= m - \sqrt{-(mm)}\,k. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Отсюда видно, что при определенно выбранной точке k тетрациклические координаты x_0, x_2, x_3 точек m_1 и m_2 равны соответствующим координатам точки m, а координата x_1 равна $\pm\sqrt{-(mm)}$.

2. Рассмотрим теперь тот случай, когда круг k мнимый. В этом случае точка k пространства P_3 находится внутри абсолюта K и кривая Q мнимая, а *группа круговых преобразований, переводящих в себя мни-*

мый круг, изоморфна группе эллиптических движений.

Все рассуждения, относящиеся к конформной интерпретации гиперболической геометрии, переносятся на эллиптический случай.

Точка m *эллиптической плоскости изображается в* M_2 ***парой точек*** m_1 *и* m_2, *находящихся в инверсии относительно мнимого круга* k.

Прямая ν *эллиптической плоскости изображается* ***кругом*** n, *ортогональным мнимому кругу* k, *т. е. таким, для которого удовлетворяется условие* $(nk) = 0$.

Все круги n плоскости, удовлетворяющие условию $(nk) = 0$, образуют так называемую нуль-систему кругов. Ее можно охарактеризовать следующим образом.

С помощью гиперболического движения P_3 внутреннюю точку k абсолюта K всегда можно перевести в центр сферы. Полярная ей плоскость будет в этом случае несобственной плоскостью. Прямым в этой несобственной плоскости соответствуют большие круги на абсолютной сфере K (круги пересечения плоскостей, полярных точкам несобственной плоскости со сферой K). Таким образом, *нуль-система кругов представляет совокупность кругов, которая некоторым круговым преобразованием может быть переведена в совокупность кругов, соответствующих большим кругам сферы K при стереографическом отображении сферы на плоскость.*

Сама подгруппа эллиптических движений в плоскости, полярной точке k, изоморфна группе вращений сферы вокруг центра.

Пусть точка k пространства P_3 имеет координаты $k(1, 0, 0, 0)$, а точка $m(x_0, x_1, x_2, x_3)$ — произвольная точка в полярной плоскости точки k. В силу условия полярной сопряженности,

$$(km) = x_0 = 0. \tag{7.3}$$

Введем в плоскости $x_0 = 0$ декартовы координаты ξ, η, причем пусть оси координат стереографически соответствуют осям координат в плоскости, на которую производится стереографическое проектирование. Из формул (3.15) и (7.3) имеем: $x_1 = \rho$, $x_2 = \rho\xi$, $x_3 = \rho\eta$, т. е. x_1, x_2, x_3 — однородные координаты точки m в несобственной плоскости. Из этих же формул следует, что круг $\xi^2 + \eta^2 = -1$ является образом точки $\boldsymbol{k}$ в M_2. Пара точек в плоскости M_2 — образ точки $\boldsymbol{m}$ эллиптической плоскости определяется равенствами

$$\begin{aligned} \boldsymbol{m}_1 &= \boldsymbol{m} + \sqrt{(\boldsymbol{mm})}\,\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{m}_2 &= \boldsymbol{m} - \sqrt{(\boldsymbol{mm})}\,\boldsymbol{k}. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Координаты x_1, x_2, x_3 этих точек равны соответствующим координатам точки $\boldsymbol{m}$, а $x_0 = \pm\sqrt{(\boldsymbol{mm})}$.

3. Рассмотрим теперь подгруппу круговых преобразований M_2, переводящих в себя вырожденный круг $\boldsymbol{k}$, т. е. точку. В пространстве P_3 этому кругу $\boldsymbol{k}$ соответствует точка $\boldsymbol{k}$ на абсолюте. С помощью некоторого кругового преобразования точка $\boldsymbol{k}$ в M_2 может быть переведена в несобственную точку. Ранее, в § 3, было показано, что подгруппа круговых преобразований, оставляющих инвариантной несобственностью точку плоскости, является группой преобразований подобия. Поэтому и в общем случае подгруппа *круговых преобразований, переводящих в себя фиксированную точку, изоморфна группе подобных преобразований, т. е. основной группе евклидовой геометрии.*

Точка евклидовой плоскости изображается в M_2 точкой.

Прямая евклидовой плоскости изображается в M_2 кругом, проходящим через фиксированную точку $\boldsymbol{k}$ плоскости.

При помощи выбора фиксированной точки $\boldsymbol{k}$ и нормирования тетрациклических координат точек $\boldsymbol{m}$ плоскости M_2 легко прийти к обычным декартовым координатам, рассматриваемым в евклидовой геометрии.

Пусть точка $\boldsymbol{k}$ имеет координаты $\boldsymbol{k}(-1, 1, 0, 0)$, а $\boldsymbol{m}$ (x_0, x_1, x_2, x_3) — произвольная точка плоскости M_2. Так как точкам $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{k}$ плоскости соответствуют точки на абсолюте, а они не могут быть полярно сопряжены друг другу, то $(\boldsymbol{mk}) = x_0 + x_1 \neq 0$.

Обозначим $x_0 + x_1$ через ρ. В § 3 было показано, что $\rho = \mathrm{const}$.

Положим

$$\frac{x_2}{\rho} = \xi, \quad \frac{x_3}{\rho} = \eta. \tag{7.5}$$

Тогда из формул $x_0 + x_1 = \rho$ и $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ следует:

$$x_0 = \rho \, \frac{1 + (\xi^2 + \eta^2)}{2}$$
$$x_1 = \rho \, \frac{1 - (\xi^2 + \eta^2)}{2} \, . \tag{7.6}$$

Формулы (7.5) и (7.6) совпадают с формулами (3.15), откуда следует, что ξ и η являются декартовыми координатами точки m. Если пронормировать координаты точки m так, чтобы $(mk) = 1$, то тогда из (7.5) получится, что

$$x_2 = \xi, \; x_3 = \eta,$$

т. е. тетрациклические координаты x_2 и x_3 оказываются обычными декартовыми координатами точки.

§ 8. Комплексные координаты Гаусса. Конформные преобразования в плоскости

Конформную геометрию на плоскости можно излагать не только с помощью действительных тетрациклических координат, но и в комплексных координатах, которые были введены Гауссом.

Вместо прямоугольных декартовых координат ξ и η точки на плоскости рассмотрим комплексно сопряженные координаты z и $\bar{z}$, связанные с ξ и η формулами

$$z = \xi + i\eta, \quad \bar{z} = \xi - i\eta. \tag{8.1}$$

Линейный элемент плоскости

$$ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2$$

принимает в координатах z, $\bar{z}$ вид

$$as^2 = dz d\bar{z}.$$

Координаты, в которых метрическая форма имеет такой вид, называются изотропными. *Будем поэтому называть координаты z, $\bar{z}$ изотропными координатами Гаусса.* (Можно считать, что точка на плоскости задается не двумя координатами z и $\bar{z}$, а одной z, так как, если задано z, то $\bar{z}$ также определяется).

Свяжем изотропные координаты Гаусса с тетрациклическими координатами. В формулы (3.15) подставим ξ и η, найденные из формулы (8.1). Получим

$$
\begin{aligned}
x_0 &= \frac{\rho}{2}(1 + z\bar{z}) \\
x_1 &= \frac{\rho}{2}(1 - z\bar{z}) \\
x_2 &= \frac{\rho}{2}(z + \bar{z}) \\
x_3 &= -\frac{i\rho}{2}(z - \bar{z}).
\end{aligned} \tag{8.2}
$$

Можно и обратно — выразить z и $\bar{z}$ через x_0, x_1, x_2, x_3:

$$z = \frac{x_2 + ix_3}{x_0 + x_1}, \quad \bar{z} = \frac{x_2 - ix_3}{x_0 + x_1}. \tag{8.3}$$

Для однозначности соответствия z, $\bar{z}$ и тетрациклических координат несобственной точке, для которой $x_0 + x_1 = 0$, ставим в соответствие $z = \bar{z} = \infty$. Тогда каждой точке конформной плоскости соответствуют определенные координаты z и $\bar{z}$.

Как известно из (3.16), круг в плоскости M_2 записывается уравнением

$$(yx) = -y_0x_0 + y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 = 0.$$

Подставляя выражения для x_i по формулам (8.2), получаем:

$$-(y_0 + y_1)z\bar{z} + (y_2 - iy_3)z + (y_2 + iy_3)\bar{z} + y_1 - y_0 = 0.$$

Положим:

$$
\begin{aligned}
-(y_0 + y_1) &= A \\
y_2 - iy_3 &= B \\
y_2 + iy_3 &= \bar{B} \\
y_1 - y_0 &= D,
\end{aligned} \tag{8.4}
$$

или

$$
\begin{aligned}
y_0 &= -\frac{1}{2}(A+D)\\
y_1 &= \frac{1}{2}(D-A)\\
y_2 &= \frac{1}{2}(B+\overline{B})\\
y_3 &= \frac{i}{2}(B-\overline{B}).
\end{aligned} \tag{8.4'}
$$

Тогда *уравнение круга в изотропных координатах Гаусса будет*

$$A z\overline{z} + Bz + \overline{B}\,\overline{z} + D = 0, \tag{8.5}$$

где A и D — действительные, а B и $\overline{B}$ — комплексно сопряженные коэффициенты [1]. Круг будет действительным, когда точка y в пространстве, которая его определяет, находится вне основной сферы, т. е. когда

$$(yy) = -y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = -AD + B\overline{B} > 0. \tag{8.6}$$

2. Выразим в координатах Гаусса преобразование инверсии, которое, согласно (6.2), задается формулой

$$x = x^* - \frac{2(x^*y)}{(yy)}\,y.$$

Имеем:

$$z = \frac{x_2 + ix_3}{x_0 + x_1} = \frac{x_2^* - \dfrac{2(x^*y)}{(yy)}\,y_2 + i\left(x_3^* - \dfrac{2(x^*y)}{(yy)}\,y_3\right)}{x_0^* - \dfrac{2(x^*y)}{(yy)}\,y_0 + x_1^* - \dfrac{2(x^*y)}{(yy)}\,y_1}.$$

Подставляем из (8.3) $x_2^* + ix_3^* = \rho z^*$ и $x_0^* + x_1^* = \rho$, из (8.4) $y_2 + iy_3 = \overline{B}$ и $y_0 + y_1 = -A$, а также из (8.6) и (8.5) $(yy) = B\overline{B} - AD$ и $(x^*y) = -Az^*\overline{z}^* + Bz^* + \overline{B}\overline{z}^* + D$ и получаем после несложных группировок:

$$z = -\frac{(\overline{B}\,\overline{z}^* + D)(\overline{B} + Az^*)}{(A\overline{z}^* + B)(\overline{B} + Az^*)}.$$

---

[1] Матрица $\left\|\begin{matrix} A & B \\ \overline{B} & D \end{matrix}\right\|$ коэффициентов уравнения круга является эрмитовой матрицей [5, стр. 28].

Общий множитель $\overline{B}+Az^*$ можно сократить, так как если $\overline{B}+Az^*=0$, то и $A\overline{z}^*+B=0$ и $z=\infty$, что имеет место и из формулы

$$z=-\frac{\overline{B}\,\overline{z}^*+D}{A\overline{z}^*+B}\,. \tag{8.7}$$

Эта формула и определяет инверсию, или симметрию относительно круга $\mathbf{y}$ [6, стр. 101]. Ее можно преобразовать к виду

$$z-z_0=\frac{a^2}{\overline{z}^*-\overline{z}_0}\,, \tag{8.8}$$

где $a^2=\dfrac{(\mathbf{y}\mathbf{y})}{(y_0+y_1)^2}=\dfrac{B\overline{B}-AD}{A^2}$ — квадрат радиуса круга инверсии, а z_0 — центр инверсии. Уравнение круга инверсии

$$|z-z_0|^2=a^2.$$

Поместим для простоты центр инверсии в начало координат ($z_0=0$). Тогда преобразование инверсии запишется более простой формулой

$$z=\frac{a^2}{\overline{z}^*}\,. \tag{8.9}$$

Из этой формулы сразу видно, что точки M и N, соответствующие при инверсии, лежат на одной прямой, исходящей из центра инверсии, причем если одна из них лежит внутри, то другая — вне круга инверсии, а их расстояния от центра связаны так, что $OM\cdot ON=a^2$.

Центр инверсии при преобразовании инверсии переходит в бесконечно удаленную точку плоскости. Уравнение круга (8.5) после преобразования (8.9) принимает вид

$$Aa^4+Ba^2\overline{z}^*+\overline{B}a^2z^*+Dz^*\,\overline{z}^*=0,$$

т. е. при инверсии круг преобразуется в круг, если он не проходит через центр инверсии ($D\neq 0$), и в прямую, если он проходит через центр; прямая же преобразуется в круг, проходящий через центр инверсии.

Все эти свойства инверсии отмечались и раньше (§ 6), но мы их повторили снова, так как в гауссовых координатах они доказываются особенно просто.

Произведение четного числа инверсий, или отображений, симметричных относительно круга, дает преобразование, которое запишется формулой

$$z = \frac{\alpha z' + \beta}{\gamma z' + \delta}, \tag{8.10}$$

где α, β, γ, δ — произвольные комплексные коэффициенты.

Из теории функций комплексного переменного известно, что преобразования (8.10) являются круговыми преобразованиями. Имеет место и обратное предложение: всякое преобразование вида (8.10) эквивалентно четному числу симметричных отображений относительно прямых и кругов [6, стр. 108].

Таким образом, *всякое круговое преобразование задается дробно-линейной функцией комплексного переменного и представляет произведение отображений, симметричных относительно прямых и кругов.*

3. В силу ф. (8.10) можно сказать, что группа конформных преобразований на плоскости изоморфна группе проективных преобразований на комплексной прямой. Инвариантом проективных преобразований на прямой является двойное отношение четырех точек с координатами z_1, z_2, z_3, z_4:

$$D(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}.$$

Если эти четыре точки лежат на действительной прямой, например на оси Ox, то $D(z_1, z_2, z_3, z_4) = D(x_1, x_2, x_3, x_4)$ будет действительным. Оно будет действительным и для 4-х точек, лежащих на одной окружности, т. к. при подходящем преобразовании (8.10) окружность можно перевести в ось Ox. Легко показать, что это двойное отношение совпадает с двойным отношением четырех точек на кривой 2-го порядка, введенным ранее ф. (1.18) или (1.19). Таким образом, *двойное отношение 4-х точек на окружности является инвариантом круговых преобразований.*

4. Круговые преобразования в плоскости не исчерпывают всех конформных преобразований. Известно, что если задано конформное преобразование в плоскости

$$\begin{aligned} \xi^* &= u(\xi, \eta) \\ \eta^* &= v(\xi, \eta), \end{aligned} \tag{8.11}$$

то линейные элементы плоскости до и после преобразования связаны соотношением

$$ds^{*2} = e^{2p} ds^2, \tag{8.12}$$

или

$$d\xi^{*2} + d\eta^{*2} = e^{2p}(d\xi^2 + d\eta^2). \tag{8.13}$$

Действительно, при этом угол Θ между двумя направлениями $\frac{d\eta}{d\xi}$ и $\frac{\delta\eta}{\delta\xi}$, определяемый по формуле

$$\cos^2\Theta = \frac{(d\xi\delta\eta + d\eta\delta\xi)}{(d\xi^2 + d\eta^2)(\delta\xi^2 + \delta\eta^2)}, \tag{8.14}$$

один и тот же до и после преобразования.

Если представить условие (8.13) в виде

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial u}{\partial \eta} d\eta\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial v}{\partial \eta} d\eta\right)^2 = e^{2p}(d\xi^2 + d\eta^2),$$

то для функций u и v имеем соотношения:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial v}{\partial \eta} = 0$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)^2.$$

Эти равенства удовлетворяются, когда

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial v}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{\partial v}{\partial \xi}, \tag{8.15}$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = -\frac{\partial v}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \xi}. \tag{8.16}$$

Уравнения (8.15) называются условиями Коши — Римана и выражают требования того, что функции u и v — гармонически сопряженные. Из них следует, что в комплексных координатах *конформное преобразование задается формулой*

$$z^* = u(\xi, \eta) + iv(\xi, \eta) = f(z), \tag{8.17}$$

где $f(z)$ — аналитическая функция z.

Из уравнений (8.16) следует, что конформное преобразование можно задавать также формулой

$$z^* = f(\bar{z}), \tag{8.18}$$

где $f(\bar{z})$ — аналитическая функция $\bar{z}$.

Преобразования (8.17) и (8.18) называются конформными преобразованиями 1-го и 2-го рода соответственно. При конформных преобразованиях 1-го рода углы сохраняются и по величине и по направлению; при конформных преобразованиях 2-го рода направление отсчета угла меняется на противоположное [6, стр. 92].

В координатах Гаусса формула (8.13) записывается в виде

$$dz^* d\bar{z}^* = e^{2p}\, dz d\bar{z}, \tag{8.19}$$

откуда

$$e^{2p} = \frac{dz^*}{dz} \cdot \frac{d\bar{z}^*}{d\bar{z}},$$

или согласно (8.17),

$$e^{2p} = f'(z)\overline{f'(z)} = |f'(z)|^2.$$

Таким образом определяется функция p, задающая конформное преобразование (8.19):

$$p = \ln|f'(z)| = \frac{1}{2}\ln\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right].$$

Можно непосредственно проверить, что найденное p удовлетворяет уравнению Лапласа; откуда следует, что функция p — гармоническая. Действительно, функция

$$\varphi(z) = \ln f'(z) = \ln|f'(z)| + i\arg f'(z) \tag{8.20}$$

является аналитической функцией, так как аналитической является $f(z)$. Поскольку $p = \ln|f'(z)|$ гармоническая функция, то $q = \arg f'(z)$ также является гармонической функцией, сопряженной p.

5. Найдем необходимое и достаточное условие того, что функция

$$w = f(z) \tag{8.21}$$

задает круговое преобразование.

От переменных z и w перейдем к новым переменным X и Y, полагая

$$z = \frac{Y}{X}, \quad dw = X\,dY - Y dX. \tag{8.22}$$

Сравнивая вторую из этих формул с выражением дифференциала функции $w = f(z)$:

$$dw = f'(z)\,dz = f'(z)\frac{XdY - YdX}{X^2},$$

находим, что

$$X = \sqrt{f'(z)}, \quad Y = z\sqrt{f'(z)}. \tag{8.23}$$

Будем рассматривать X и Y как текущие координаты радиуса вектора $\boldsymbol{R}$ в некоторой вспомогательной плоскости. Из (8.22) следует, что

$$dw = \langle \boldsymbol{R}\, d\boldsymbol{R} \rangle,$$

где $\langle \boldsymbol{R} d\boldsymbol{R} \rangle$ — косое произведение векторов $\boldsymbol{R}$, $d\boldsymbol{R}$ (смешанное произведение векторов $\boldsymbol{R}$, $d\boldsymbol{R}$ и единичного вектора, перпендикулярного плоскости этих векторов) [7, стр. 21]. Последнюю формулу можно записать в виде

$$\left\langle \boldsymbol{R}\frac{d\boldsymbol{R}}{dw} \right\rangle = 1. \tag{8.24}$$

Дифференцируем это равенство еще раз и получаем:

$$\left\langle \boldsymbol{R}\frac{d^2\boldsymbol{R}}{dw^2} \right\rangle = 0. \tag{8.25}$$

Отсюда следует, что векторы $\frac{d^2\boldsymbol{R}}{dw^2}$ и $\boldsymbol{R}$ коллинеарны, т. е. имеет место равенство

$$\frac{d^2\boldsymbol{R}}{dw^2} + k\boldsymbol{R} = 0\,[1]. \tag{8.26}$$

[1] Можно заметить, что w в формуле (8.22) и k в формуле (8.26) совпадают соответственно с эквицентроаффинной дугой и эквицентроаффинной кривизной плоской кривой $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(x, y)$. [9; стр. 82—83].

Чтобы определить k, составим косое произведение левой и правой частей этого равенства на $\frac{dR}{dw}$. Используя (8.24), получим:

$$k = \left\langle \frac{dR}{dw} \, \frac{d^2R}{dw^2} \right\rangle.$$

Переходим от переменной w к z и, выражая вектор R через X и Y, получаем:

$$k = \left\langle \frac{dR}{dz} \cdot \frac{d^2R}{dz^2} \right\rangle \left(\frac{dz}{dw}\right)^3 = \frac{\frac{dX}{dz}\,\frac{d^2Y}{dz^2} - \frac{dY}{dz}\,\frac{d^2X}{dz^2}}{\left(\frac{dw}{dz}\right)^3}. \tag{8.27}$$

Из (8.22) выразим $\frac{dY}{dz}$ и $\frac{d^2Y}{dz^2}$ через X и z:

$$\frac{dY}{dz} = z\frac{dX}{dz} + X, \quad \frac{d^2Y}{dz^2} = z\frac{d^2X}{dz^2} + 2\frac{dX}{dz}.$$

Примем во внимание также, что $X = \sqrt{f'(z)}$. Подставим эти значения в (8.27) и получим:

$$k = -\frac{1}{2(f')^2}\left[\frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2\right],$$

т. е.

$$k = -\frac{1}{2(f')^2}\{w, z\}.$$

Выражение

$$\{w, z\} = \left[\frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2\right]$$

называется производной Шварца от функции w по z. Можно записать ее и в следующем виде:

$$\{w, z\} = \frac{d^2\varphi(z)}{dz^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi(z)}{dz}\right)^2,$$

где

$$\varphi = \ln f'(z).$$

Если $\{w, z\} = 0$, т. е. $k = 0$, то из уравнения (8.26) следует, что

$$\frac{d^2R}{dw^2} = 0,$$

или

$$\frac{d^2X}{dw^2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d^2Y}{dw^2} = 0,$$

или

$$X = aw + b$$

$$Y = cw + d.$$

Таким образом,

$$z = \frac{Y}{X} = \frac{cw + d}{aw + b}.$$

Разрешая эту формулу относительно w, имеем:

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}.$$

Отсюда можно сделать важный вывод: *для того чтобы аналитическая функция $w = f(z)$ задавала круговое преобразование, необходимо и достаточно, чтобы производная Шварца этой функции обращалась в нуль.*

В случае преобразования инверсии (8.8), являющегося частным случаем конформного, имеем:

$$dz^* d\bar{z}^* = a^4 \frac{dz\, d\bar{z}}{|z - z_0|^4},$$

т. е. функция p в формуле (8.13) при преобразовании инверсии будет:

$$p = 2 \ln \frac{a}{|z - z_0|}.$$

§ 9. Обобщенные тетрациклические координаты. Автополярный и полуизотропный реперы

1. Наряду с обычными однородными координатами точки на плоскости и в пространстве, связанными с прямоугольной декартовой системой координат, рассматривают так называемые проективные координаты.

Чтобы задать проективные координаты в пространстве берут четыре плоскости, образующие тетраэдр. Этот тетраэдр называется координатным. За однородные проективные координаты точки берут числа x_0, x_1, x_2, x_3, пропорциональные правым частям уравнений граней. В этих координатах уравнения граней будут $x_0=0$, $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$, противолежащие вершины $\boldsymbol{z}_0$, $\boldsymbol{z}_1$, $\boldsymbol{z}_2$, $\boldsymbol{z}_3$ будут иметь координаты $\boldsymbol{z}_0(\xi^0, 0, 0, 0)$, $\boldsymbol{z}_1(0, \xi^1, 0, 0)$, $\boldsymbol{z}_2(0, 0, \xi^2, 0)$, $\boldsymbol{z}_3(0, 0, 0, \xi^3)$,

а в силу однородности этих координат, можно положить

$$\boldsymbol{z}_0(1, 0, 0, 0), \quad \boldsymbol{z}_1(0, 1, 0, 0), \quad \boldsymbol{z}_2(0, 0, 1, 0), \quad \boldsymbol{z}_3(0, 0, 0, 1). \tag{9.1}$$

Пусть произвольная точка $\boldsymbol{x}$ в пространстве имеет проективные координаты x_0, x_1, x_2, x_3. Эту точку можно разложить по четырем вершинам основного тетраэдра:

$$\boldsymbol{x} = \tilde{x}_0\boldsymbol{z}_0 + \tilde{x}_1\boldsymbol{z}_1 + \tilde{x}_2\boldsymbol{z}_2 + \tilde{x}_3\boldsymbol{z}_3. \tag{9.2}$$

Запишем эту формулу в координатах. Получим:

$$x_0 = \tilde{x}_0, \quad x_1 = \tilde{x}_1, \quad x_2 = \tilde{x}_2, \quad x_3 = \tilde{x}_3.$$

Таким образом, *можно определить проективные координаты точки как коэффициенты в разложении этой точки по вершинам координатного тетраэдра* и записать формулу (9.2) в виде

$$\boldsymbol{x} = x_0\boldsymbol{z}_0 + x_1\boldsymbol{z}_1 + x_2\boldsymbol{z}_2 + x_3\boldsymbol{z}_3. \tag{9.2'}$$

2. В гиперболической геометрии координатный тетраэдр выбирают определенным образом, связывая его с абсолютной поверхностью 2-го порядка.

Употребителен автополярный тетраэдр, т. е. такой, у которого всякая грань является полярой противолежащей вершины относительно абсолюта. Строится этот тетраэдр следующим образом. За первую и вторую вершины ($\boldsymbol{z}_1$ и $\boldsymbol{z}_2$) берутся две произвольные точки, полярные друг другу. Все точки, полярные им обеим, находятся на прямой пересечения полярных плоскостей $\boldsymbol{z}_1$ и $\boldsymbol{z}_2$. За третью и четвертую вершины (z_3 и z_4) берут две полярно сопряженные точки на этой прямой. Таким образом, все вершины автополярного тетраэдра полярно сопряжены друг другу.

Если точки z_1 и z_2 лежат вне абсолюта, то прямая, полярная им, пересекает абсолют, и точки z_0 и z_3 лежат одна внутри абсолюта, другая вне. Обратно: если z_0 и z_3 лежат одна внутри, другая вне абсолюта, то z_1 и z_2 лежат на прямой, не пересекающей абсолют, т. е. вне абсолюта. Следовательно, из четырех вершин автополярного репера всегда три вершины лежат вне абсолюта, одна внутри.

Пусть уравнение абсолюта

$$\sum_{\alpha, \beta=0}^{3} a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta = 0. \tag{9.3}$$

Полярное произведение точек z_i и z_j будет при этом

$$(z_i z_j) = \sum_{\alpha, \beta=0}^{3} a_{\alpha\beta} z_{i\alpha} z_{j\beta}. \tag{9.4}$$

Условие полярной сопряженности точек z_i и z_j записывается в виде

$$(z_i z_j) = 0 \text{ при } i \neq j. \tag{9.5}$$

Условие, что z_1, z_2, z_3 лежат вне абсолюта, а z_0 — внутри, будет

$$(z_0 z_0) < 0, \quad (z_1 z_1) > 0, \quad (z_2 z_2) > 0, \quad (z_3 z_3) > 0.$$

Нормируем вершины так, чтобы

$$-(z_0 z_0) = (z_1 z_1) = (z_2 z_2) = (z_3 z_3) = 1. \tag{9.6}$$

Из условий (9.5) и (9.6) следует, что $a_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$ и $-a_{00} = a_{11} = a_{22} = a_{33}$, т. е., что уравнение абсолюта в случае автополярного репера можно привести к виду:

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0. \tag{9.7}$$

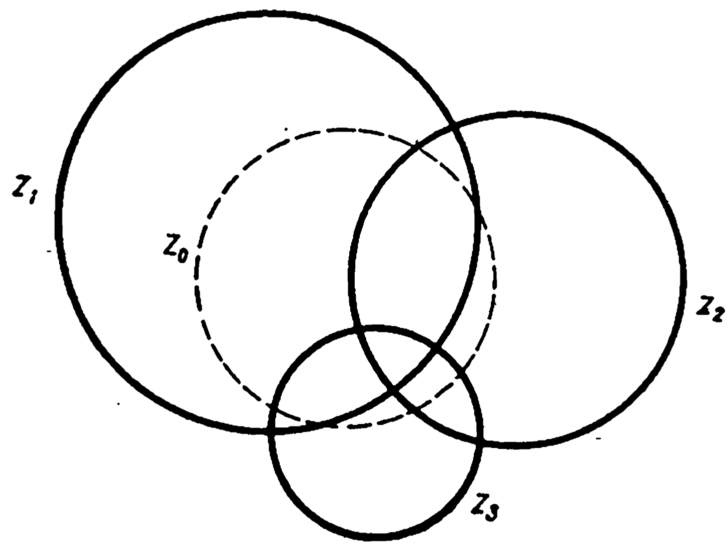
Нормирование вершин, определенное условиями (9.6), соответствует тому выбору координат вершин (9.1), который был сделан ранее.

Выпишем отдельно матрицу полярных произведений z_i и z_j в рассматриваемом нами случае:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & z_1 & z_2 & z_3 & z_0 \\ \hline z_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline z_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline z_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline z_0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \qquad (9.8)$$

Выбору координатного тетраэдра в пространстве соответствует в конформной плоскости выбор четырех основных кругов, составляющих координатный репер плоскости. Всякий пятый круг (или точка) выражается как линейная комбинация четырех основных по формуле (9.2′). *Коэффициенты x^i в формуле* (9.2′) *называются обобщенными тетрациклическими координатами круга (или точки).*

В случае автополярного репера три из основных кругов действительны и один, соответствующий внутренней точке абсолюта, — мнимый. Все эти круги взаимно ортогональны.



Тетрациклические координаты точек и кругов, введенные раньше, — это координаты соответствующих точек пространства по отношению к декартовой системе координат. Координатный трехгранник декартовой системы в пространстве можно рассмотреть как автополярный тетраэдр, у которого вершины совпадают с началом координат $O(1, 0, 0, 0)$ и с не собственными точками осей: оси Oz — $C(0, 1, 0, 0)$, Ox — $A(0, 0, 1, 0)$, Oy — $B(0, 0, 0, 1)$. Этим вершинам в конформной плоскости соответствуют круги: точке O — мнимый круг $\xi^2 + \eta^2 = -1$, точке C — действительный круг $\xi^2 + \eta^2 = 1$, точке A — ось $\xi = 0$, точке B — ось $\eta = 0$. Таким образом, обычные тетрациклические координаты можно рассматривать как коэффициенты разложения круга по этим специальным четырем кругам.

3. *Наряду с автополярным, применяют и другой репер, называемый полуизотропным.* За две его вершины берут две полярные относительно абсолюта точки z_1 и z_2, лежащие на произвольной прямой, не пересекающей абсолют, проводят через эту прямую две плоскости, касательные к абсолюту. За вершины z_3 и z_0 принимают точки касания этих плоскостей. Они полярно сопряжены точкам z_1 и z_2, но не сопряжены друг относительно друга, т. е. имеют место равенства

$$(z_1z_2) = (z_1z_3) = (z_1z_0) = (z_2z_3) = (z_2z_0) = 0. \tag{9.9}$$

Выбирают такое нормирование однородных координат, что

$$(z_1z_1) = (z_2z_2) = (z_0z_0) = 1.$$

Тогда уравнение абсолюта (9.3) принимает вид:

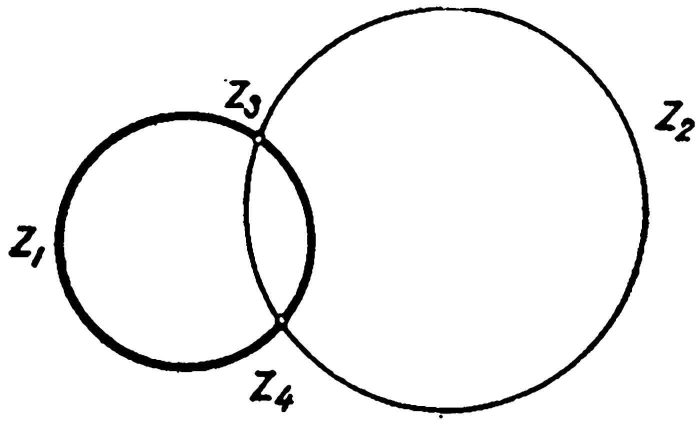
$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_0x_3 = 0. \tag{9.10}$$

Запишем матрицу полярных произведений вершин полуизотропного репера:

	z_1	z_2	z_3	z_0
z_1	1	0	0	0
z_2	0	1	0	0
z_3	0	0	0	1
z_0	0	0	1	0

(9.11)

В конформной плоскости вершинам z_1 и z_2 соответствуют круги, ортогональные друг другу, а вершинам z_3 и z_0 — вырожденные круги, т. е. точки, общие двум первым кругам. Это полуизотропный репер в плоскости. Обобщенные тетрациклические координа-



ты круга (или точки) в этом случае — коффициенты разложения круга (или точки) по кругам z_1, z_2 и точкам z_3 и z_0. Оси обычной декартовой системы координат в плоскости можно рассматривать как полуизотропный репер, считая оси ξ и η взаимно ортогональными кругами z_1 и z_2, а нулевую и бесконечно удаленную точки, общие прямым $\xi = 0$ и $\eta = 0$, точками z_3 и z_0.

Будем в дальнейшем, говоря о тетрациклических координатах, подразумевать обобщенные тетрациклические координаты, соответствующие определенному выбору координатного репера.

§ 10. Дифференциальная геометрия последовательности кругов в конформной плоскости

1. Кривой трехмерного гиперболического пространства, как последовательности точек в конформной плоскости соответствует *последовательность кругов*. Это множество кругов, которое задается параметрическим уравнением

$$x = x(t), \tag{10.1}$$

где t — произвольный параметр и $x(t)$ — дифференцируемая нужное число раз вектор-функция, причем

$\dot{x}^2 = (\dot{x}\dot{x}) = \left(\frac{dx}{dt}\frac{dx}{dt}\right) > 0$. Смысл этого ограничения будет выяснен позднее.

Рассмотрим некоторые дифференциально-геометрические свойства последовательности кругов в конформной плоскости. Прежде всего отметим, что если x задана каноническими координатами, т. е. $x^2 = 1$, то

$$(x\dot{x}) = 0. \tag{10.2}$$

При изменении параметра t:

$$t = f(t^*)$$

функция $x(t)$ меняется:

$$x(t) = x(f(t^*)) = x^*(t^*).$$

Производная ее меняется по формуле

$$\frac{dx^*}{dt^*} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{dt^*}.$$

Так как при этом

$$\sqrt{\left(\frac{dx^*}{dt^*}\frac{dx^*}{dt^*}\right)}\, dt^* = \sqrt{\frac{dx}{dt} \cdot \frac{dx}{dt}}\, dt,$$

то

$$d\sigma = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\frac{dx}{dt}\right)}\, dt = \sqrt{\dot{x}^2}\, dt \tag{10.3}$$

не меняется при изменении параметра t и, следовательно, является инвариантом по отношению к преобразованию параметра.

Для пространственной кривой гиперболического пространства, соответствующей рассматриваемой последовательности кругов,

$$\sigma = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}^2}\, dt \tag{10.4}$$

является длиной дуги, т. е. натуральным параметром. В § 2 это было показано формулой (2.22) для случая гиперболической плоскости. Для пространства все рассуждения совершенно аналогичны.

Будем называть σ натуральным параметром и для последовательности кругов $x = x(t)$ в конформной плоскости M_2.

Выясним геометрический смысл σ в плоскости M_2. Известно (из § 4), что расстояние между двумя точками в гиперболическом пространстве совпадает с углом между двумя кругами, соответствующими этим точкам в конформной плоскости. Поэтому дифференциал $d\sigma$, представляющий расстояние между бесконечно близкими точками кривой в гиперболическом пространстве, является в то же время углом $d\varphi$ между двумя бесконечно близкими кругами последовательности. Из (10.3) следует, что

$$d\varphi = \sqrt{\dot{x}^2}\,dt. \tag{10.5}$$

Если последовательность кругов задана как функция натурального параметра

$$x = x(\sigma), \tag{10.6}$$

то для нее

$$d\varphi = d\sigma = \sqrt{x'}\; d\sigma,$$

т. е.

$$x'^2 = 1 \tag{10.7}$$

(штрихи означают дифференцирование по натуральному параметру σ).

2. В дальнейшем при исследовании последовательности кругов существенную роль будет играть огибающая последовательности. Огибающая последовательности кругов (10.1) может состоять из двух ветвей, одной ветви или быть мнимой. Найдем аналитические признаки всех этих случаев. Обозначим через v и $\tilde{v}$ характеристические точки огибающей, т. е. точки, в которых огибающая касается круга последовательности. Каждая характеристическая точка v лежит на данном и на бесконечно близком круге, т. е. удовлетворяет двум уравнениям:

$$(xv) = 0$$

$$(x + dx\ v) = 0.$$

Но $(x + dx, v) = (x + \dot{x}\,dt, v) = (\dot{x}v)\,dt$. Поэтому второе уравнение можно записать в более простом виде

$$(\dot{x}v) = 0.$$

Таким образом, координаты характеристических точек определяются из двух уравнений:

$$\begin{aligned}(xv) &= 0\\ (\dot{x}v) &= 0.\end{aligned} \tag{10.8}$$

В гиперболическом пространстве уравнения (10.8) выражают, что точка v, соответствующая характеристической точке, лежит на прямой, полярной прямой, проходящей через точки x и $\dot{x}$. Кроме того, эта точка v должна лежать и на абсолюте. В зависимости от того, пересекает ли поляра прямой $\{x, \dot{x}\}$ абсолют, касается его или не пересекает, имеются две действительные, одна действительная или две комплексно сопряженные характеристические точки. Чтобы получить аналитические условия для всех этих случаев, надо решать совместно уравнение поляры прямой $\{x, \dot{x}\}$ и абсолюта. Но вместо поляры можно рассмотреть саму прямую $\{x, \dot{x}\}$, задаваемую уравнением

$$u = \lambda x + \mu \dot{x}, \tag{10.9}$$

т. к. поляра пересекает абсолют, касается его или не пересекает, когда сама прямая не пересекает абсолют, касается его или пересекает соответственно. Если точки прямой (10.9) лежат на абсолюте, то

$$(\lambda x + \mu \dot{x})^2 = 0,$$

или

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 x^2 + 2\frac{\lambda}{\mu}(x\dot{x}) + \dot{x}^2 = 0,$$

или, в силу (10.2),

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \dot{x}^2 = 0.$$

Отсюда следует, что при $\dot{x}^2 > 0$ прямая (10.9) не пересекает абсолют, при $\dot{x}^2 = 0$ касается его и при $\dot{x}^2 < 0$ пересекает в двух точках. Следовательно, при $\dot{x}^2 > 0$ характеристические точки v и $\tilde{v}$ действительны и различны, при $\dot{x}^2 = 0$ v и $\tilde{v}$ совпадают, при $\dot{x}^2 < 0$ v и $\tilde{v}$ мнимые. В первом случае огибающая последовательности кругов имеет две ветви, во втором —

одну, в третьем — действительной огибающей не существует. Условие $\dot{x}^2 > 0$, введенное в начале параграфа, означает, что *мы ограничиваемся рассмотрением таких последовательностей кругов, которые имеют две действительные ветви огибающей.*

Для круга, определяемого вектором $\dot{x}$, из (10.2) и (10.8) имеют место следующие равенства:

$$
\begin{aligned}
(x\dot{x}) &= 0 \\
(v\dot{x}) &= 0 \qquad\qquad (10.10) \\
(\tilde{v}\dot{x}) &= 0.
\end{aligned}
$$

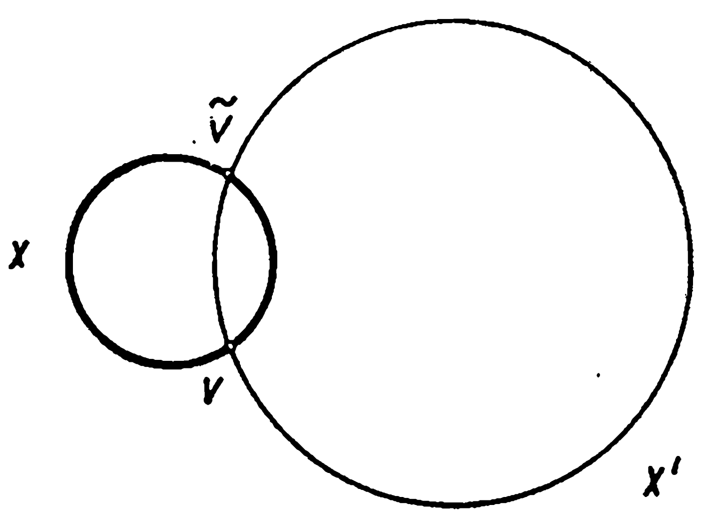
Последние два равенства показывают, что этот круг проходит через характеристические точки; первое — что круги x и $\dot{x}$ ортогональны. Круг $\dot{x}$ называют *нормальным* кругом по отношению к кругу x.

Из (10.7) следует, что производные по натуральному параметру дают канонические координаты нормального круга.

При истолковании равенств (10.10) в гиперболическом пространстве получаем, что $\dot{x}$ — точка, являющаяся полюсом плоскости, проходящей через точки x, v и $\tilde{v}$.

Будем предполагать для дальнейшего, что последовательность кругов задана функцией натурального параметра

$$x = x(\sigma).$$



Свяжем с каждым кругом последовательности местный полуизотропный репер, состоящий из самого круга x, нормального ему круга $z = x'$ и двух характеристических точек v и $\tilde{v}$. Согласно (9.11), имеет место следующая таблица полярных произведений векторов x, z, v, $\tilde{v}$:

	x	z	v	$\tilde{v}$
x	1	0	0	0
z	0	1	0	0
v	0	0	0	1
$\tilde{v}$	0	0	1	0

(10.11)

Условие $v\tilde{v} = 1$ имеет место при подходящем нормировании v и $\tilde{v}$. Это нормирование устанавливается с точностью до преобразования

$$\hat{v} = \lambda v, \quad \hat{\tilde{v}} = \frac{1}{\lambda}\tilde{v}, \tag{10.12}$$

где $\lambda = \lambda(\sigma)$ — произвольная функция, удовлетворяющая требованиям непрерывности и дифференцируемости.

Найдем для последовательности кругов $x = x(\sigma)$ *деривационные формулы*, т. е. формулы, дающие разложения производных основных кругов x', z', v', $\tilde{v}'$ по этим четырем кругам.

Первая формула получается автоматически из определения: $x' = z$.

Чтобы получить вторую, положим

$$z' = \alpha x + \beta z + \gamma v + \delta\tilde{v}$$

и найдем все коэффициенты.

$\alpha = (xz') = (xx'') = -1$, так как $x'^2 = 1$ и $(xx') = 0$.

$\beta = (zz') = (x'x'') = 0$, так как из $x'^2 = 1$ следует, что $2(x'x'') = 0$.

Для коэффициентов γ и δ введем обозначения: $\gamma = (z'\tilde{v}) = \tilde{c}$, $\delta = (z'v) = c$.

Таким образом, вторая деривационная формула запишется в виде

$$z' = -x + \tilde{c}v + c\tilde{v}.$$

Положим

$$v' = mx + nz + pv + q\tilde{v}$$

и определим m, n, p, q.

$m = (xv') = 0$, так как $(xv) = 0$ и $(x'v) = (zv) = 0$;

$n = (zv') = -c$, так как $(vz) = 0$ и $(vz') = c$;

$q = (vv') = 0$, так как $(vv) = 0$;

$p = (v'\tilde{v})$.

Подходящим образом нормируя v и $\tilde{v}$, можно добиться, чтобы $(v'\tilde{v}) = 0$. Действительно: из (10.12) следует, что $\hat{v}' = \lambda' v + \lambda v'$ и, значит, $(\hat{v}'\hat{\tilde{v}}) = \frac{\lambda'}{\lambda} + (v'\tilde{v})$. Если потребовать, чтобы $(\hat{v}'\hat{\tilde{v}}) = 0$, то в качестве λ надо взять $\lambda = Ae^{-\int (v'\tilde{v})\, ds}$, где A — постоянная интегрирования. Следовательно, при подходящем выборе λ получим $p = (\hat{v}'\hat{\tilde{v}}) = 0$. В дальнейшем будем считать v и $\tilde{v}$ выбранными именно таким образом и значок $\wedge$ писать не будем. Функции v и $\tilde{v}$ теперь определены с точностью до преобразования

$$v^* = Av, \quad \tilde{v}^* = \frac{1}{A} v, \tag{10.13}$$

где A — произвольная постоянная.

Третья деривационная формула записывается в виде

$$v' = -cz.$$

Аналогично доказывается и четвертая формула

$$\tilde{v}' = -\tilde{c}z.$$

При этом используется, что так как $(v\tilde{v}) = 1$, то при $(v'\tilde{v}) = 0$ одновременно и $(v\tilde{v}') = 0$.

Таким образом, получены следующие деривационные формулы последовательности кругов:

$$
\begin{aligned}
x' &= z \\
z' &= -x + \tilde{c}v + c\tilde{v} \\
v' &= -cz \\
\tilde{v}' &= -\tilde{c}z.
\end{aligned}
\qquad (10.14)
$$

Матрица коэффициентов этих формул имеет следующий вид:

	x	z	v	$\tilde{v}$
x'	0	1	0	0
z'	-1	0	$\tilde{c}$	c
v'	0	$-c$	0	0
$\tilde{v}'$	0	$-\tilde{c}$	0	0

(10.15)

Существенно различных коэффициентов в формулах (10.14) два: c и $\tilde{c}$. Они не являются абсолютными инвариантами. При перенормировании (10.13) c переходит в $\frac{c}{A}$, а $\tilde{c}$ в $A\tilde{c}$. Абсолютным инвариантом будет произведение $c\tilde{c}$. Примем за *первый абсолютный инвариант*

$$b = -2c\tilde{c}. \qquad (10.16)$$

Если $b = 0$, то по крайней мере одна из величин — c или $\tilde{c}$ — равна нулю. Если $c = 0$, то из (10.14) и $v' = 0$, т. е. точка v постоянна. Это значит, что все круги последовательности проходят через одну точку и последовательность имеет только одну огибающую $\tilde{v}$. Если $c = \tilde{c} = 0$, то обе точки v и $\tilde{v}$ постоянны, все круги проходят через две фиксированные точки, т. е. последовательность кругов представляет пучок.

Абсолютными инвариантами будут также выражения

$$g = \frac{c'}{c}, \quad (c \neq 0) \text{ и } \tilde{g} = \frac{\tilde{c}'}{\tilde{c}}, \quad (\tilde{c} \neq 0). \qquad (10.17)$$

Инварианты b, g, $\tilde{g}$ не являются независимыми и связаны формулой

$$\frac{b'}{b} = g + \tilde{g}. \tag{10.18}$$

Отсюда следует, что последовательность имеет два независимых абсолютных инварианта. Зависимости $b = b(\sigma)$ и $g = g(\sigma)$ для последовательности кругов играют в известном смысле роль натуральных уравнений. Они определяют последовательность с точностью до кругового преобразования. Действительно, зная b и g, можно определить из (10.18) $\tilde{g}$; из g и $\tilde{g}$ можно определить $c = c(\sigma)$ и $\tilde{c} = \tilde{c}(\sigma)$ по формулам (10.17); затем по формулам (10.14) можно найти $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{v}$, $\tilde{\boldsymbol{v}}$. Эти решения определяются, если задать начальные значения векторов. Последовательности, соответствующие различным начальным значениям, переводятся друг в друга круговыми преобразованиями.

4. Найдем соприкасающийся круг $\boldsymbol{y}$ огибающей $\boldsymbol{v}(\sigma)$ данной последовательности кругов. Он проходит через три бесконечно близкие точки кривой $\boldsymbol{v}$, и, следовательно, для него имеют место равенства:

$$(\boldsymbol{y}\boldsymbol{v}) = 0, \ (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}) = 0, \ \left(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v} + \frac{1}{2}\, d^2\boldsymbol{v}\right) = 0,$$

т. е.

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{y}\boldsymbol{v}) &= 0 \\ (\boldsymbol{y}\boldsymbol{v}') &= 0 \\ (\boldsymbol{y}\boldsymbol{v}'') &= 0. \end{aligned} \tag{10.19}$$

Будем считать, что $\boldsymbol{y}$ имеет каноническое нормирование ($\boldsymbol{y}^2 = 1$), и найдем его разложение по основным кругам полуизотропного репера. Положим

$$\boldsymbol{y} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{z} + \gamma\boldsymbol{v} + \delta\tilde{\boldsymbol{v}}.$$

Из (10.19) следует, что $\delta = (\boldsymbol{y}\boldsymbol{v}) = 0$. Из (10.14) получаем, что $(\boldsymbol{y}\boldsymbol{v}') = -\beta c = 0$. Полагая $c \neq 0$, имеем, что $\beta = 0$. Из условия $\boldsymbol{y}^2 = 1$ следует, что $1 = \alpha^2$. С точностью до знака $\alpha = 1$. Чтобы определить γ, надо использовать (10.19_3). Предварительно из (10.14) найдем $\boldsymbol{v}''$:

$$\boldsymbol{v}'' = -c'\boldsymbol{z} - c(-\boldsymbol{x} + \tilde{c}\boldsymbol{v} + c\tilde{\boldsymbol{v}}).$$

Умножим $\boldsymbol{v}''$ на $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \gamma\boldsymbol{v}$ и получим

$$c - c^2\gamma = 0,$$

откуда

$$\gamma = \frac{1}{c}.$$

Таким образом, *соприкасающийся круг кривой* $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\sigma)$ *задается формулой*

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}. \tag{10.20}$$

Аналогично, соприкасающийся круг второй кривой $\tilde{\boldsymbol{v}} = \tilde{\boldsymbol{v}}(\sigma)$ определяется вектором

$$\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{x} + \frac{1}{\tilde{c}}\tilde{\boldsymbol{v}}. \tag{10.21}$$

Последовательность кругов, соприкасающихся к кривой $\boldsymbol{v}$, имеет только одну ветвь огибающей. Действительно, из (10.20) имеем:

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{x}' - \frac{c'}{c^2}\boldsymbol{v} + \frac{\boldsymbol{v}'}{c} = \boldsymbol{z} - \frac{c'}{c^2}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{z} = -\frac{c'}{c^2}\boldsymbol{v}$$

(дифференцирование идет по натуральному параметру последовательности $\boldsymbol{x}$).

Отсюда

$$\boldsymbol{y}'^2 = \left(\frac{c'}{c^2}\right)^2 \boldsymbol{v}^2 = 0.$$

Найдем угол между соприкасающимися кругами $\boldsymbol{y}$ и $\tilde{\boldsymbol{y}}$. Так как эти круги заданы каноническими координатами, то

$$\cos\varphi = (\boldsymbol{y}\tilde{\boldsymbol{y}}) = 1 + \frac{1}{c\tilde{c}} = 1 - \frac{2}{b}.$$

Отсюда

$$\frac{2}{b} = 1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

и, следовательно,

$$b = \frac{1}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}. \tag{10.22}$$

Эта формула дает геометрическое истолкование инварианта b через угол между соприкасающимися кругами огибающей.

Если c или $\tilde{c}$ обращаются в нуль (т. е. $b=0$), то формула (10.20) или (10.21) теряет смысл.

5. Рассмотрим частный случай, когда все круги $\boldsymbol{x}$ последовательности ортогональны некоторому постоянному кругу $\boldsymbol{k}$. Разложим этот круг по основным кругам местного полуизотропного репера. Пусть

$$\boldsymbol{k} = \alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{z} + \gamma \boldsymbol{v} + \delta \tilde{\boldsymbol{v}}. \tag{10.23}$$

Так как $\boldsymbol{x}$ ортогонален $\boldsymbol{k}$, то $(\boldsymbol{x}\boldsymbol{k})=0$. Дифференцируя это равенство и учитывая, что круг $\boldsymbol{k}$ постоянный, получаем также, что $(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{k}) = (\boldsymbol{z}\boldsymbol{k}) = 0$. Отсюда имеем, что в разложении (10.23) коэффициенты α и β обращаются в нули, т. е.

$$\boldsymbol{k} = \gamma \boldsymbol{v} + \delta \tilde{\boldsymbol{v}}. \tag{10.24}$$

В силу постоянства круга $\boldsymbol{k}$ должно выполняться условие

$$\frac{d\boldsymbol{k}}{d\sigma} = \gamma \boldsymbol{v}' + \delta \tilde{\boldsymbol{v}}' + \gamma' \boldsymbol{v} + \delta' \tilde{\boldsymbol{v}} = 0,$$

или (после замены $\boldsymbol{v}'$ и $\tilde{\boldsymbol{v}}'$ по формулам (3.15)) условие

$$-(\gamma c + \delta \tilde{c})\boldsymbol{z} + \gamma' \boldsymbol{v} + \delta' \tilde{\boldsymbol{v}} = 0.$$

Так как векторы $\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{v}$, $\tilde{\boldsymbol{v}}$ линейно независимы, то отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \gamma' &= 0, \\ \delta' &= 0, \\ \gamma c + \delta \tilde{c} &= 0, \end{aligned} \tag{10.25}$$

т. е. коэффициенты γ, δ постоянны и c, $\tilde{c}$ определяются через одну функцию:

$$\begin{aligned} c &= \lambda(\sigma)\,\delta \\ \tilde{c} &= -\lambda(\sigma)\,\gamma. \end{aligned} \tag{10.26}$$

Таким образом, *все круги последовательности ортогональны к некоторому постоянному кругу* $\boldsymbol{k}$, если параметры c и $\tilde{c}$ этой последовательности находятся в линейной зависимости (10.25_3) с постоянными коэффициентами. Постоянный круг $\boldsymbol{k}$ задается при этом равенством (10.24).

Из (10.25) следует, что $c = \nu\tilde{c}$, где $\nu = -\frac{\delta}{\gamma}$ — постоянная. При допустимой перенормировке векторов (10.13) параметры c и $\tilde{c}$ преобразуются по формулам: $\hat{c} = Ac$, $\hat{\tilde{c}} = \frac{1}{A}\tilde{c}$. Отсюда следует, что $\hat{c} = \nu A^2 \hat{\tilde{c}}$. Подбирая подходящим образом A, можно добиться, чтобы $c = \pm\tilde{c}$. Так как $b = -2c\tilde{c}$, то равенства $c = -\tilde{c}$ можно добиться при $b > 0$, равенства $c = \tilde{c}$ при $b < 0$.

Из (10.24) и (10.26) следует, что

$$(\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}) = 2\gamma\delta = -2\frac{c\tilde{c}}{\lambda^2} = \frac{b}{\lambda^2}. \qquad (10.27)$$

Отсюда видно, что *постоянный круг* $\boldsymbol{k}$ *будет действительным, если* $b > 0$. *При этом* $c, \tilde{c} \neq 0$, *и в силу* (10.25_3) *и* (10.17) $g = \tilde{g}$. *Постоянный круг* $\boldsymbol{k}$ *будет мнимым, если* $b < 0$ *и* $g = \tilde{g}$. *Постоянный круг* $\boldsymbol{k}$ *вырождается в точку, если* $b = 0$. Условие $(\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}) = 0$ выражает в этом случае, что все круги последовательности проходят через одну точку.

Если принять круг $\boldsymbol{k}$ за абсолют, то, как было показано в § 7, из группы круговых преобразований выделяется подгруппа преобразований, лежащая в основе гиперболической (при $\boldsymbol{k}^2 > 0$), эллиптической (при $\boldsymbol{k}^2 < 0$) или евклидовой (при $\boldsymbol{k}^2 = 0$) геометрии. При этом рассматриваемая последовательность кругов в плоскости M_2 изображает последовательность прямых в гиперболической, эллиптической или евклидовой плоскостях соответственно. Отсюда следует, что плоская кривая, как огибающая прямых в гиперболической, эллиптической или евклидовой плоскостях, интерпретируется в M_2 как огибающая специальной последовательности кругов, для которой $b > 0$, $g = \tilde{g}$

или $b < 0$, $g = \tilde{g}$ или $b = 0$ соответственно. *Теорию кривых в неевклидовых и евклидовой плоскостях можно рассматривать как теорию этих специальных последовательностей кругов в* M_2. Каждой точке кривой в плоскости соответствует в M_2 пара точек $\boldsymbol{v}$ и $\tilde{\boldsymbol{v}}$ огибающей.

Пусть $b > 0$. Согласно (7.2),

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{m} + \sqrt{-\boldsymbol{m}^2}\,\boldsymbol{k}$$

$$\tilde{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{m} - \sqrt{-\boldsymbol{m}^2}\,\boldsymbol{k},$$

где $\boldsymbol{m}$ — точка в гиперболической плоскости, образом которой в M_2 являются точки $\boldsymbol{v}$ и $\tilde{\boldsymbol{v}}$. Точка $\boldsymbol{m}$ находится внутри абсолюта. Пронормируем ее так, чтобы $\boldsymbol{m}^2 = -1$. Тогда

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{m} + \boldsymbol{k}$$

$$\tilde{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{m} - \boldsymbol{k}.$$

Отсюда следует, что $d\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{m}$. Но из (2.22) следует, что $d\boldsymbol{m}^2 = ds^2$, где s — неевклидова длина дуги. Поэтому

$$ds^2 = d\boldsymbol{v}^2. \tag{10.28}$$

Эта формула выражает неевклидову длину дуги через вектор $\boldsymbol{v}$, рассматриваемый в M_2.

Из ф. (10.14_3) следует, что

$$d\boldsymbol{v} = -c\,d\boldsymbol{x},$$

или

$$d\boldsymbol{v}^2 = c^2 d\boldsymbol{x}^2. \tag{10.29}$$

Но, согласно (10.5),

$$d\boldsymbol{x}^2 = d\varphi^2, \tag{10.30}$$

где $d\varphi$ — угол между двумя бесконечно близкими кругами последовательности, или угол между касательными в бесконечно близких точках кривой гиперболической плоскости. Из (10.28), (10.29) и (10.30) имеем:

$$ds^2 = c^2 d\varphi^2, \tag{10.31}$$

или с точностью до знака

$$c = \frac{ds}{d\varphi} = \rho, \tag{10.32}$$

т. е. параметр c совпадает с радиусом кривизны кривой гиперболической плоскости. Инвариант

$$g = \frac{1}{c}\frac{dc}{d\varphi} = \frac{d\rho}{ds} = \tilde{g}. \tag{10.33}$$

Аналогичные результаты получаются и при $b < 0$, только круг $\boldsymbol{k}$ будет мнимым.

В случае евклидовой геометрии, т. е. когда $b = 0$, обращается в нуль c или $\tilde{c}$. Пусть, например, $\tilde{c} = 0$. Тогда из (10.14_4) следует, что $\tilde{\boldsymbol{v}} = \text{const}$, а из (10.25) и (10.24), что $\gamma = 0$ и $\boldsymbol{k} = \delta\tilde{\boldsymbol{v}}$, т. е. круг $\boldsymbol{k}$ совпадает с точкой $\tilde{\boldsymbol{v}}$. Можно показать, что выводы о длине дуги и радиусе кривизны кривой в этом случае аналогичны соответствующим выводам (10.28) и (10.32), (10.33) в случае гиперболической геометрии:

$$d\boldsymbol{v}^2 = ds^2, \quad c^2 = \left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 = \rho^2, \quad g = \frac{d\rho}{ds}.$$

§ 11. Теория кривых в конформной плоскости

В предыдущем параграфе была рассмотрена теория последовательностей кругов. В общем случае с последовательностью связывались две огибающие кривые. *Теория кривых в конформной плоскости строится на основе теории последовательностей кругов: каждая кривая рассматривается как огибающая некоторой определенной последовательности кругов.* Казалось бы самым естественным в качестве такой последовательности взять последовательность соприкасающихся кругов кривой. Но это оказывается неудобным, так как у такой последовательности, как было показано ранее, обе ветви огибающей совпадают, и к ней нельзя в полной мере применить теорию последовательностей кругов с двумя огибающими, развитую в предыдущем параграфе.

Поэтому свяжем с данной последовательностью кругов еще два круга — главные круги огибающих $v(\sigma)$ и $\tilde{v}(\sigma)$.

Предварительно введем специальное нормирование для точек огибающей, положив

$$\check{v} = \sqrt{\frac{|(v\dot{v}\ddot{v}\dddot{v})|}{(\dot{v}^2)^3}}\, v, \tag{11.1}$$

где $(v\dot{v}\ddot{v}\dddot{v})$ — определитель 4-го порядка, составленный из координат входящих в него векторов. Введенное нормирование не зависит ни от параметризации кривой v, ни от первоначального нормирования v.

При изменении параметра t на $u = u(t)$ имеем:

$$\begin{gathered} v = v, \\ \dot{v}_t = \dot{v}_u \dot{u}_t \\ \ddot{v}_{tt} = \ddot{v}_{uu}\dot{u}_t^2 + A\dot{v}_u \\ \dddot{v}_{ttt} = \dddot{v}_{uuu}\dot{u}_t^3 + B\ddot{v}_{uu} + C\dot{v}_u, \end{gathered}$$

где A, B, C — некоторые коэффициенты. Отсюда следует, что

$$\begin{gathered} (v\dot{v}_t\ddot{v}_{tt}\dddot{v}_{ttt}) = (v\dot{v}_u\ddot{v}_{uu}\dddot{v}_{uuu})\,\dot{u}_t^6 \\ (\dot{v}_t^2)^3 = (\dot{v}_u^2)^3\,\dot{u}_t^6, \end{gathered}$$

т. е. $\check{v}$ остается без изменения.

При изменении первоначального нормирования имеем:

$$\begin{gathered} v = \lambda v^* \\ \dot{v} = \lambda\dot{v}^* + Av^* \\ \ddot{v} = \lambda\ddot{v}^* + B\dot{v}^* + Cv^* \\ \dddot{v} = \lambda\dddot{v}^* + D\ddot{v}^* + E\dot{v}^* + Fv^*, \end{gathered}$$

где A, B, C, D, E, F — некоторые коэффициенты. Отсюда следует, что

$$\begin{gathered} (v\dot{v}\ddot{v}\dddot{v}) = \lambda^4 (v^*\dot{v}^*\ddot{v}^*\dddot{v}^*), \\ (\dot{v}^2)^3 = \lambda^6 (\dot{v}^{*2})^3 \end{gathered}$$

и, следовательно,

$$\check{v}' = \check{v}^{*}.$$

Пользуясь произволом выбора параметра, будем считать, что $v = v(\sigma)$. Тогда

$$\check{v} = \sqrt{\frac{|(vv'v''v''')|}{(v'^2)^3}}\, v. \qquad (11.2)$$

Найдем v', v'', v''', пользуясь формулами (10.14):

$$v' = -cz,$$

$$v'' = cx - c'z - c\tilde{c}v - c^2\tilde{v},$$

$$v''' = 2c'x + (2c^2\tilde{c} + c - c'')z - (2\tilde{c}c' + c\tilde{c}')v - 3cc'\tilde{v}.$$

Тогда

$$(vv'v''v''') = 3c^3c'(vzx\tilde{v}) + 2c^3c'(vz\tilde{v}x) =$$

$$= -c^3c'(xzv\tilde{v}),$$

$$(v'^2)^3 = c^6,$$

где $(xzv\tilde{v})$ — определитель из координат вершин координатного тетраэдра. Он равен 1. Следовательно,

$$\check{v} = \sqrt{\left|\frac{c'}{c^3}\right|}\, v,$$

или

$$\check{v} = \sqrt{|g|}\,\frac{v}{c}. \qquad (11.3)$$

В качестве главных кругов огибающей $v(\sigma)$ *возьмем круги*

$$s = y \pm \check{v},$$

где y — *соприкасающийся круг, взятый в каноническом нормировании.* Согласно (10.20) и (11.3),

$$s^+ = y + \check{v} = x + (1 + \sqrt{|g|})\frac{v}{c},$$

$$s^- = y - \check{v} = x + (1 - \sqrt{|g|})\frac{v}{c}. \qquad (11.4)$$

Главные круги входят в состав пучка, которому принадлежат круги y и v. Это параболический пучок кругов, касательных к $v(\sigma)$ в точке v. Следовательно, главные круги s^+ и s^- касаются кривой v.

Из формулы (6.2) следует, что круги s^+ и s^- симметричны по отношению к соприкасающемуся кругу y. Действительно:

$$s^+ = -s^- + 2y.$$

Кроме того $(s^-y) = (yy)$, т. е. $\frac{(s^-y)}{(yy)} = 1$. Таким образом, можно записать:

$$s^+ = -s^- + 2\frac{(s^-y)}{(yy)}y,$$

а это и есть условие, что s^- и $-s^-$ (или все равно $+s^-$) находятся в инверсии, или симметричны относительно y.

Из формулы (11.4) следует, что *последовательность кругов* x *совпадает с последовательностью главных кругов* s *своей огибающей* v, *если* $\sqrt{|g|} = 1$, т. е. если $g = \pm 1$. В этом случае сама последовательность называется главной. $d\sigma = \sqrt{\dot{x}^2}\,dt$ будет в этом случае углом между бесконечно близкими главными кругами.

Всякая кривая в конформной плоскости обычно и рассматривается как огибающая своих главных кругов. Дифференциальная геометрия кривой совпадает с дифференциальной геометрией ее главной последовательности. *Деривационные формулы* (10.14) *полностью справедливы и в этом случае, только* $|g| = 1$, и, следовательно, кривая характеризуется заданием одной зависимости $b = \frac{1}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}$, где φ — угол между соприкасающимся кругом данной кривой в данной точке и соприкасающимся кругом второй огибающей последовательности главных кругов в соответствующей точке.

2. Инварианту σ главной последовательности можно придать и другой вид. В случае главной последовательности из (11.3) следует, что

$$\check{v} = \frac{v}{c}.$$

Отсюда

$$\check{v}' = \frac{v'}{c} + v\left(\frac{1}{c}\right)',$$

или

$$(\check{v}')^2 = \frac{v'^2}{c^2}.$$

Но из (10.14) имеем: $v' = -cx'$, или $\left(\frac{v'}{c}\right)^2 = x'^2$, т. е.

$$(\check{v}')^2 = (x')^2 = 1.$$

С другой стороны,

$$\dot{\check{v}} = \check{v}' \frac{d\sigma}{dt},$$

или

$$(\dot{\check{v}})^2 = (\check{v}')^2 \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2. \qquad (11.5)$$

Известно, что $\check{v}$ не зависит от первоначального нормирования v. Поэтому можно предположить, что первоначальное нормирование уже удовлетворяет формуле (11.1), т. е.

$$\frac{(\check{v}\,\dot{\check{v}}\,\ddot{\check{v}}\,\dddot{\check{v}})}{(\dot{\check{v}}^2)^3} = \frac{(v\,\dot{v}\,\ddot{v}\,\dddot{v})}{(\dot{v}^2)^3} = 1.$$

Тогда

$$(\dot{\check{v}})^2 = \dot{v}^2 = \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = \frac{(\check{v}\,\dot{\check{v}}\,\ddot{\check{v}}\,\dddot{\check{v}})}{(\dot{\check{v}}^2)^2} = \frac{(v\,\dot{v}\,\ddot{v}\,\dddot{v})}{(\dot{v}^2)^2}.$$

Таким образом,

$$\sigma = \int \sqrt{\frac{|(v\dot{v}\,\ddot{v}\,\dddot{v})|}{(\dot{v}^2)^2}}\, dt \qquad (11.6)$$

является инвариантом. Этот инвариант введен Пиком и Либманом. Он не зависит от последовательности кругов, а зависит только от огибающей кривой.

Параметр Пика и Либмана имеет простой метрический смысл. Он выражается через длину дуги s и кривизну k плоской кривой $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t)$:

$$\sigma = \int \sqrt{\frac{dk}{dt}\frac{ds}{dt}}\, dt \quad [4, \text{ стр. } 181]. \tag{11.7}$$

Расписывая (11.6) и (11.7) в декартовых координатах ξ, η (пользуясь формулами (3.15)), можно непосредственно убедиться, что

$$d\sigma^2 = \frac{|(\dot{\boldsymbol{v}}\ddot{\boldsymbol{v}}\dddot{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v})|}{(\dot{\boldsymbol{v}}^2)^2} dt^2 = dk\, ds. \tag{11.7'}$$

3. Рассмотрим круг $\boldsymbol{p}$, который проходит через точки $\boldsymbol{v}$, $\tilde{\boldsymbol{v}}$ под углом α к кривой $\boldsymbol{v}$, или иначе говоря, под углом α к кругу совокупности $\boldsymbol{x}$. Предполагаем, что $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{x}$ заданы в каноническом нормировании.

Для круга $\boldsymbol{p}$ имеют место формулы

$$\boldsymbol{pv} = \boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{v}} = 0,\ \boldsymbol{pp} = 1,\ \boldsymbol{px} = \cos\alpha,\ \boldsymbol{px}' = \sin\alpha.$$

Тогда

$$\boldsymbol{p} = \cos\alpha\, \boldsymbol{x} + \sin\alpha\, \boldsymbol{x}'. \tag{11.8}$$

Будем рассматривать кроме $\boldsymbol{p}$ еще два бесконечно близких круга, проходящих через $\tilde{\boldsymbol{v}}$ и пересекающих кривую $\boldsymbol{v}$ под тем же углом α. Рассмотрим, когда эти три круга образуют пучок. Условие для этого зависит только от точки $\tilde{\boldsymbol{v}}$ и кривой $\boldsymbol{v}$, но не зависит от совокупности кругов. Мы можем поэтому предположить такую совокупность кругов, что все круги проходят через одну точку и огибаются кривой $\boldsymbol{v}$. Деривационные формулы (10.14) имеют для этого случая вид:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}' &= \boldsymbol{z}, \\ \boldsymbol{z}' &= -\boldsymbol{x} + c\tilde{\boldsymbol{v}}, \\ \boldsymbol{v}' &= -c\boldsymbol{z}, \\ \tilde{\boldsymbol{v}}' &= 0. \end{aligned}$$

Дифференцируем (11.8) по σ и получаем:

$$p' = -\sin\alpha x + \cos\alpha x' + c\sin\alpha\tilde{v},$$

$$p'' = -\cos\alpha x - \sin\alpha x' + [c\cos\alpha + c'\sin\alpha]\tilde{v}.$$

Для случая пучка должна существовать линейная зависимость между p, p', p'', т. е. должно иметь место соотношение

$$p'' = Ap + Bp'.$$

Но $p'p' = 1 = -pp''$ и $p'p'' = 0$. Поэтому $B = 0$ и $A = -1$. Следовательно, в нашем случае должно быть

$$p'' = -p,$$

или

$$-\cos\alpha x - \sin\alpha x' + (c\cos\alpha + c'\sin\alpha)\tilde{v} =$$
$$= -\cos\alpha x - \sin\alpha x',$$

откуда

$$c\cos\alpha + c'\sin\alpha = 0,$$

или

$$\frac{c'}{c} = g = -\operatorname{ctg}\alpha. \tag{11.9}$$

Таким образом, *три круга, выходящие из одной точки* $\tilde{v}$ *и пересекающие кривую* $v(\sigma)$ *под тем же самым углом* α, *образуют пучок, если угол* α *связан формулой* (11.9) *с инвариантом* g *специальной совокупности кругов.*

Если $\alpha = \frac{\pi}{4}$, то $g = -1$, и из формулы (10.28) следует, что x совпадает с одним из главных кругов s. Следовательно, в этом случае $\tilde{v}$ лежит на одном из главных кругов. Вторая вершина пучка равнозначна с первой. Поэтому она должна лежать на втором главном круге.

Следовательно, *если кривая является изогональной траекторией пучка кругов с углом* $\alpha = \frac{\pi}{4}$, *то вершины этого пучка лежат на главных кругах кривой.*

При произвольном угле α v является изогональной траекторией пучка, если x совпадает с одним из кругов:

$$w^{-} = y + \sqrt{|\operatorname{tg}\alpha|}\,\overset{\vee}{v} = x + (1 + \sqrt{|\operatorname{tg}\alpha g|})\frac{v}{c} \tag{11.10}$$

или

$$w^{-} = y - \sqrt{|\operatorname{tg}\alpha|}\,\overset{\vee}{v} = x + (1 - \sqrt{|\operatorname{tg}\alpha g|})\frac{v}{c}.$$

Вершины пучка лежат на этих кругах.

Будем рассматривать кривую $v = v(\sigma)$ как огибающую последовательности кругов с $g = 1$. Получим условие, что эта кривая является изогональной траекторией некоторого пучка кругов. Вершины пучка лежат на кругах w^{+} и w^{-}: одна — в точке пересечения кругов w^{+}, другая — кругов w^{-}. Определим, в каком случае все круги последовательности w^{+} пересекаются в одной точке.

В пункте 5 § 10 было показано, что круги x проходят через одну точку, если $b = 0$. Из формул (10.14) следует, что

$$x''x'' = z'z' = 1 + 2c\tilde{c}.$$

Отсюда условие $b = -2c\tilde{c} = 0$ записывается в виде

$$1 - x''x'' = 0.$$

Если перейти от параметра σ к общему параметру t, то это условие запишется в виде

$$(\ddot{x}\ddot{x})(\dot{x}\dot{x}) - (\dot{x}\ddot{x})^2 - (\dot{x}\dot{x})^3 = 0. \tag{11.11}$$

Применим это условие к совокупности w^{+}, когда $g = 1$. Дифференцируя (11.10), имеем:

$$w^{+\prime} = -\sqrt{|\operatorname{tg}\alpha|}\,x' - (1 + \sqrt{|\operatorname{tg}\alpha|})\frac{v}{c},$$

$$w^{+\prime\prime} = +\sqrt{|\operatorname{tg}\alpha|}\,x + (1 + \sqrt{|\operatorname{tg}\alpha|}\,x' +$$

$$+\left[1 + \sqrt{|\operatorname{tg}\alpha|}\left(1 + \frac{b}{2}\right)\right]\frac{v}{c} + \frac{b}{2}\sqrt{|\operatorname{tg}\alpha|}\frac{\tilde{v}}{\tilde{c}},$$

откуда

$$(w^{+\prime} w^{+\prime}) = |\operatorname{tg} \alpha| = \text{const}.$$

Формула (11.11) запишется в виде

$$(w^{+\prime\prime} w^{+\prime\prime}) - (w^{+\prime} w^{+\prime})^2 = 0,$$

или, после подстановки $w^{+\prime}$ и $w^{+\prime\prime}$, в виде

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + b\,|\operatorname{tg} \alpha| = 1, \tag{11.12}$$

откуда

$$|\operatorname{tg} \alpha| = \frac{1}{2}(-b + \sqrt{b^2 + 4}) \tag{11.13}$$

(аналогичное условие получается для кривой w^-). Так связан параметр b совокупности главных кругов с углом α. Этот угол постоянный, если постоянно b.

4. Применяя результаты предыдущего параграфа, рассмотрим один пример кривой в конформной плоскости.

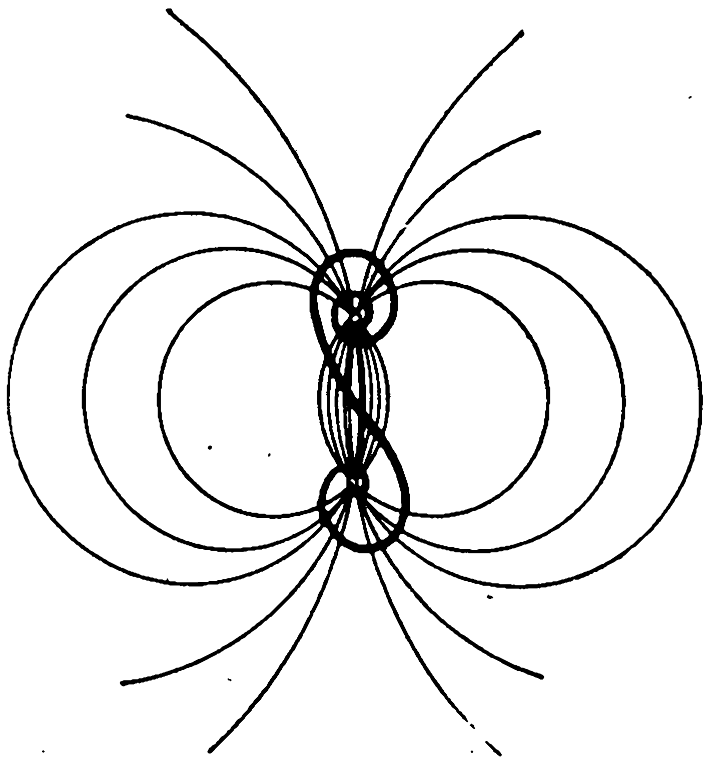
Пусть круги x являются главными кругами обеих огибающих, т. е. имеют место равенства $|g| = 1$ и $|\tilde{g}| = 1$. Рассмотрим случай, когда g и $\tilde{g}$ имеют разные знаки. Тогда

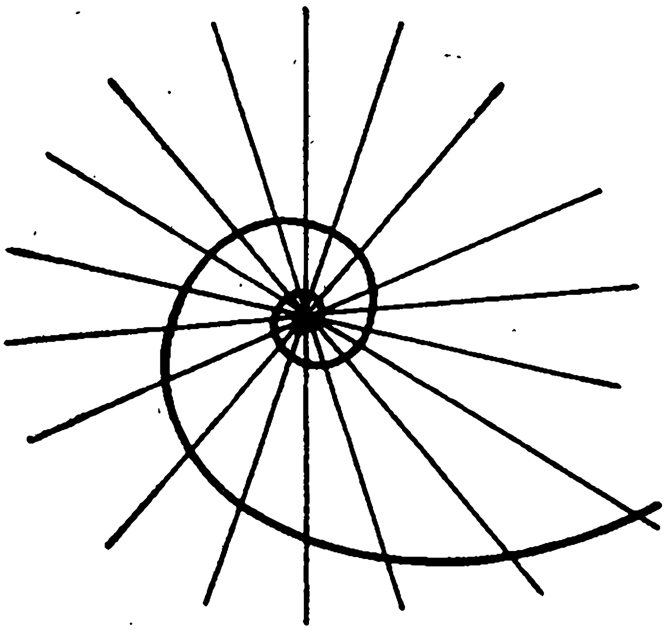
$$g + \tilde{g} = 0,$$

и из формул (10.18) следует, что $b' = 0$, или $b = \text{const}$. Тогда угол α, определяемый формулой (11.13), постоянный. Уравнение (11.12) тождественно выполняется для всех кругов совокупности, т. е. эти круги образуют пучок. *Кривая является изогональной траекторией пучка кругов, т. е. локсодромой.*

Так как в рассматриваемом случае точки v и $\tilde{v}$ играют одинаковую роль, то и кривая $\tilde{v}$ также является локсодромой. Углы α, под которыми кривые v и $\tilde{v}$ пересекают пучок, отсчитываются в противоположных направлениях.

Таким образом, имеет место предложение: *если круги совокупности являются главными кругами обеих огибающих, то эти кривые необходимо являются локсодромами равных углов пересечения.*





Если перевести одну из фиксированных точек локсодромы в бесконечность, то получим изогональную траекторию пучка прямых — логарифмическую спираль, которая в евклидовой геометрии характеризуется уравнением $\frac{d\rho}{ds} = \text{const}$. При этом главные круги совокупности совпадают с касательными прямыми.

Локсодрома, таким образом, конформно эквивалентна логарифмической спирали.

Уравнение действительной локсодромы при подходящем выборе четырех круговых координат всегда можно представить в форме

$$x_0 = \operatorname{ch} \beta t \qquad x_2 = \cos \alpha t$$

$$x_1 = \operatorname{sh} \beta t \qquad x_3 = \sin \alpha t,$$

где α и β постоянные, а t — параметр кривой.

§ 12. Конформная геометрия в пространстве

1. В предыдущих параграфах рассматривалась плоская конформная геометрия. Перенесем ряд понятий этой геометрии на трехмерное пространство.

Назовем конформным пространством обычное евклидово пространство, дополненное одной несобственной точкой. Основными геометрическими образами в этом пространстве будут точки и сферы. Плоскость представляет частный случай сферы, а именно сферу, проходящую через несобственную точку. Говоря в дальнейшем о сферах в расширенном смысле слова, будем считать, что в совокупность сфер входят и плоскости. Круг в пространстве — это линия пересечения двух сфер; прямая — круг, проходящий через несобственную точку. В некоторых случаях точку тоже можно рассматривать как сферу, именно сферу нулевого радиуса.

Так же как для изложения конформной геометрии плоскости удобными оказались тетрациклические координаты, так *в конформной геометрии пространства удобно ввести так называемые пентасферические координаты.*

Пусть ξ, η, ζ — декартовы прямоугольные координаты точки в пространстве. Уравнение сферы в них, как известно, будет

$$(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 + (\zeta - \zeta_0)^2 - R^2 = 0, \qquad (12.1)$$

где $\rho_0(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ — центр сферы и R — радиус.

Воспользовавшись аналогией с формулами (3.18), *пентасферические координаты сферы введем с помощью формул*

$$y_0 = \sigma \frac{1 + (\rho_0^2 - R^2)}{2} = \sigma \frac{1 + (\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2 - R^2)}{2}$$

$$y_1 = \sigma \frac{1 - (\rho_0^2 - R^2)}{2} = \sigma \frac{1 - (\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2 - R^2)}{2}$$

$$y_2 = \sigma\xi_0$$
$$y_3 = \sigma\eta_0 \qquad (12.2)$$
$$y_4 = \sigma\zeta_0,$$

где σ — произвольный множитель.

Эти координаты однородные. Если задана сфера, то они определяются с точностью до общего множителя. Обратно, если заданы пентасферические координаты сферы, то однозначно определяются центр и радиус сферы:

$$\xi_0 = \frac{y_2}{y_0 + y_1}, \quad \eta_0 = \frac{y_3}{y_0 + y_1}, \quad \zeta_0 = \frac{y_4}{y_0 + y_1}, \qquad (12.3)$$

$$R^2 = \frac{-y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}{(y_0 + y_1)^2}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение сферы (12.1), получим это уравнение в виде

$$(y_0 + y_1)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - 2y_2\xi - 2y_3\eta -$$
$$- 2y_4\zeta + y_0 - y_1 = 0. \qquad (12.4)$$

Сфера вырождается в плоскость, если $y_0 + y_1 = 0$. В этом случае y_2, y_3, y_4 совпадают с обычными координатами нормального вектора плоскости.

Чтобы ввести пентасферические координаты точки: x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 — рассмотрим точку как сферу нулевого радиуса. Согласно (12.2), *пентасферические координаты выражаются через декартовы координаты* ξ, η, ζ *по формулам:*

$$x_0 = \sigma \frac{1 + \rho^2}{2} = \sigma \frac{1 + (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}{2}$$

$$x_1 = \sigma \frac{1 - \rho^2}{2} = \sigma \frac{1 - (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}{2}$$

$$x_2 = \sigma\xi \tag{12.5}$$
$$x_3 = \sigma\eta$$
$$x_4 = \sigma\zeta.$$

Пентасферические координаты точки не только однородны но и удовлетворяют соотношению

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0, \tag{12.6}$$

как это следует из (12.3) при $R = 0$.

Для удобства терминологии будем считать, что каждой сфере или точке в пространстве ставится в соответствие псевдовектор y или x пятимерного пространства, координаты которого совпадают с пентасферическими координатами сферы или точки соответственно, т. е. псевдовектор $y(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4)$ или $x(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Пентасферические координаты сферы и точки конформного пространства были введены с помощью формул (12.2) и (12.5) по аналогии с тетрациклическими координатами круга и точки в конформной плоскости. Можно было бы ввести их, пользуясь стереографической проекцией, как это делалось для плоской геометрии в § 3. Однако стереографическая проекция в рассматриваемом случае выводит в 4-х мерное пространство, изложение теряет наглядность, и все равно в конечном счете приходится пользоваться аналогией.

2. *Группа преобразований конформной пространственной геометрии состоит из таких линейных однородных преобразований пентасферических координат*

$$x_i^* = \sum_{k=0}^{4} p_i^k x_k, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, \quad |p_i^k| \neq 0, \tag{12.7}$$

которые оставляют инвариантным уравнение

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0. \tag{12.8}$$

Из этого определения сразу следует, что при конформных преобразованиях точки переходят в точки, сферы — в сферы (сферы понимаются в обобщенном смысле), т. е. конформные преобразования пространства являются сферическими преобразованиями.

Группа сферических преобразований зависит от 10 параметров. Действительно, всего в формуле (12.7) 25 коэффициентов. Условие (12.8), в силу однородности пентасферических координат, можно записать в виде

$$-\overset{*}{x}{}_0^2+\overset{*}{x}{}_1^2+\overset{*}{x}{}_2^2+\overset{*}{x}{}_3^2+\overset{*}{x}{}_4^2=$$
$$-x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2.$$

Если подставить $\overset{*}{x}_i$ по формулам (12.7), то получится 15 условий, которые накладываются на коэффициенты p_i^k. Полагая

$$e_{ij}=-\overset{0}{p}_i\overset{0}{p}_j+\overset{1}{p}_i\overset{1}{p}_j+\overset{2}{p}_i\overset{2}{p}_j+\overset{3}{p}_i\overset{3}{p}_j+\overset{4}{p}_i\overset{4}{p}_j,$$

запишем эти 15 условий в виде

$$-e_{00}=e_{11}=e_{22}=e_{33}=e_{44}=1,$$
$$e_{ij}=0 \text{ при } i\neq j.$$

Таким образом, действительно независимыми в формуле (12.7) остаются 10 коэффициентов, т. е. группа сферических преобразований 10-членная.

Сферические преобразования являются конформными преобразованиями, причем в трехмерном евклидовом пространстве других конформных преобразований нет. Это впервые было доказано Лиувиллем.

Аналогом сферических преобразований пространства являются круговые преобразования плоскости. В § 8 было отмечено, что круговые преобразования на плоскости не исчерпывают всех конформных преобразований плоскости. Это существенно отличает круговые преобразования плоскости от сферических преобразований пространства.

Преобразованиями типа конформных преобразований в пространстве впервые занимался Кэли. Затем эту группу преобразований рассматривал Лоренц (1907).

Лоренцовы преобразования определяются как линейные однородные преобразования пяти переменных

$$\overset{*}{x}_i=\sum_{k=0}^{4} p_i^k x_k;\ i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4;\ |p_j^k|\neq 0,$$

при которых сохраняется инвариантным уравнение

$$-x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=0.$$

Сопоставляя это определение с определением конформных преобразований, заключаем, что *конформные, или сферические, преобразования трехмерного евклидова пространства образуют 10-членную группу, аналитическое выражение которой в пентасферических координатах совпадает с аналитическим выражением группы лоренцовых преобразований пяти переменных.*

Матрица лоренцовых преобразований $\|p_i^j\|$ переходит в ортогональную, если в ней первую вертикаль и первую горизонталь одновременно умножить на $i=\sqrt{-1}$.

3. Существенной в определении конформных преобразований пространства является квадратичная форма

$$-x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2.$$

Назовем ее значение *полярным квадратом вектора* $\boldsymbol{x}(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ и будем обозначать $(\boldsymbol{xx})$, т. е. положим

$$(\boldsymbol{xx})=-x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2. \tag{12.9}$$

Из (12.5) и (12.2) следует, что для точки $(\boldsymbol{xx})=0$, для сферы $(\boldsymbol{xx})=\sigma^2R^2>0$.

Квадратичной форме (12.9) соответствует билинейная форма двух серий переменных y_i и z_i, которую мы будем называть полярным произведением векторов $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$ и обозначим $(\boldsymbol{yz})$:

$$(\boldsymbol{yz})=-y_0z_0+y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3. \tag{12.10}$$

Свяжем полярное произведение двух векторов с углом между сферами, соответствующими этим векторам.

Пусть векторы $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$ являются векторами двух сфер с центрами $\rho_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$, $\rho_2(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ и радиусами R_1 и R_2 соответственно. Тогда, согласно (12.2),

$$(\boldsymbol{yz})=-\frac{\sigma^2}{2}[(\rho_1-\rho_2)^2-R_1^2-R_2^2].$$

Но

$$(\rho_1-\rho_2)^2=\overrightarrow{O_1O_2}^2=R_1^2+R_2^2-2R_1R_2\cos\psi,$$

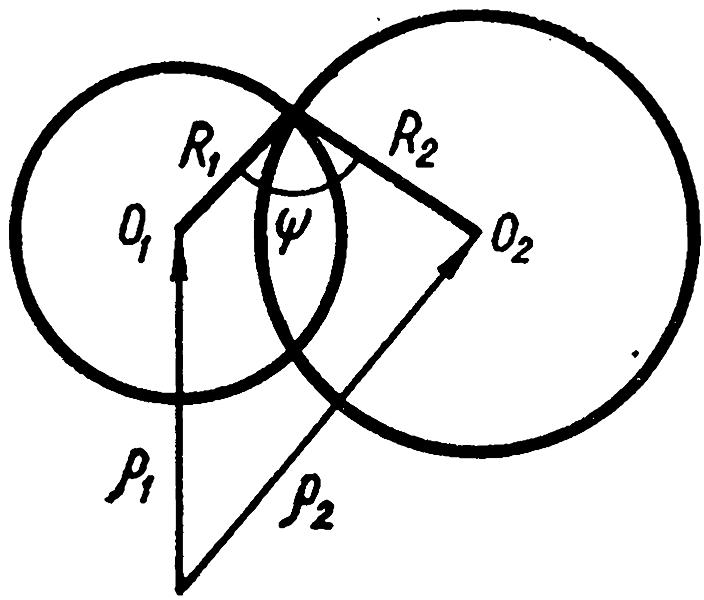
где ψ — угол между сферами.

Отсюда следует, что

$$(yz) = \sigma^2 R_1 R_2 \cos\psi.$$

Подставляя из (12.2)

$$\sigma R_1 = \sqrt{(yy)}, \quad \sigma R_2 = \sqrt{(zz)},$$



получаем

$$\cos\psi = \frac{(yz)}{\sqrt{(yy)}\sqrt{(zz)}}. \tag{12.11}$$

Эта формула аналогична формуле (4.2). Она показывает, как *угол между двумя сферами выражается через векторы* **y** *и* **z**, *соответствующие этим сферам.*

Угол между сферами является инвариантом этих сфер по отношению к конформным преобразованиям. Следовательно, инвариантом является и выражение

$$J = \frac{(yz)^2}{(yy)(zz)}$$

(см. (2.17)).

Из формулы (12.11) следует, что *условием ортогональности двух сфер будет равенство нулю полярного произведения векторов, им соответствующих,* т. е.

$$(yz) = 0.$$

Пусть теперь y является сферой, а x — точкой. Подставим в билинейную форму (yx) выражения пентасферических координат сферы через декартовы из (12.2). Получим:

$$(yx) = -\frac{\sigma^2}{2}[(y_0 + y_1)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - 2y_2\xi - 2y_3\eta - \\ - 2y_4\zeta + y_0 - y_1]. \qquad (12.12)$$

Сравнивая это выражение с (12.4), заключаем, что *равенство*

$$(yx) = 0,$$

когда y сфера, а x — точка, представляет условие, что точка x лежит на сфере y.

Если x — переменная точка, то

$$(yx) = 0$$

дает уравнение сферы, соответствующей вектору y, в точечных координатах. Это же уравнение будет уравнением плоскости, если $y_0 + y_1 = 0$.

Пусть x и y — две точки.

Для двух точек равенство

$$(xy) = 0$$

возможно только в том случае, когда точки x и y совпадают. Действительно: подставляя в (xy) пентасферические координаты точек через декартовы (ξ_1, η_1, ζ_1) и (ξ_2, η_2, ζ_2) по формулам (12.5), заключаем, что

$$(xy) = \rho[(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2], \qquad (12.13)$$

где ρ — некоторый множитель.

4. Рассмотрим линейные многообразия сфер.

Если даны две сферы y и z, то формула

$$w = \alpha y + \beta z \qquad (12.14)$$

дает разложение вектора сферы w по векторам сфер y и z, или просто разложение сферы w по сферам y и z. Меняя отношение $\frac{\beta}{\alpha}$, получаем различные сферы w. *Совокупность всех сфер, определенных равенством* (12.14) *называется пучком сфер.* Это однопараметрическое линейное многообразие сфер.

Плоскость, входящая в состав пучка сфер, называется радикальной плоскостью.

Пучок сфер может содержать и сферы нулевого радиуса, т. е. точки. Для точек

$$(ww) = \alpha^2 (yy) + 2\alpha\beta (yz) + \beta^2 (zz) = 0.$$

Это уравнение квадратное относительно $\frac{\beta}{\alpha}$ и имеет различные случаи корней в зависимости от значения

$$\delta = (yz)^2 - (yy)(zz). \tag{12.15}$$

Если $\delta > 0$, то пучок содержит две сферы нулевого радиуса. Это *гиперболический пучок.*

Если $\delta < 0$, то пучок не содержит сфер нулевого радиуса. Это *эллиптический пучок.*

Если $\delta = 0$, то в пучке имеется одна сфера нулевого радиуса. Это *параболический пучок.*

Из (12.11) и (12.15) следует, что при $\delta > 0$ $\cos^2\psi > 1$, что быть не может, т. е. сферы гиперболического пучка не пересекаются.

При $\delta < 0$ $\cos^2\psi < 1$, т. е. все сферы пересекаются. При этом все они пересекаются по одному кругу, поскольку из того, что точка x принадлежит сферам y и z, следует, что она принадлежит и любой сфере w, так как из равенств $(xy) = 0$ и $(xz) = 0$ в случае (12.14) следует $(xw) = 0$.

При $\delta = 0$ $\cos^2\psi = 1$, т. е. угол между любыми двумя сферами параболического пучка равен нулю. Считая, что y — точка параболического пучка, т. е. $(yy) = 0$ и $\delta = 0$ имеем, что $(yz) = 0$, а из (12.14) — что $(yw) = 0$, т. е. все сферы параболического пучка касаются друг друга в общей точке.

Наряду с пучком сфер можно рассматривать линейные многообразия сфер, зависящие от двух и трех существенных параметров:

$$w = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

$$w = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t.$$

Это двупараметрические и трехпараметрические связки сфер.

5. Типичным преобразованием пространства, относящимся к конформным преобразованиям (так же, как и на плоскости), является преобразование инверсии, или симметрии, относительно сферы.

Если y — фиксированная сфера, а x и x^* — точки, симметричные относительно нее ($Ox^* \cdot Ox = R^2$, где O — центр, а R — радиус сферы y), то имеет место формула

$$x = x^* - 2\frac{(x^*y)}{(yy)}y. \tag{12.16}$$

Можно доказать, что всякое сферическое преобразование состоит из преобразования симметрии относительно сферы и движения.

6. Наряду с обычными тетрациклическими координатами в плоскости, в § 9 были введены обобщенные тетрациклические координаты точки и круга как коэффициенты разложения их по сферам некоторого репера.

В пространстве также можно ввести репер, аналогичный полуизотропному реперу плоскости. В качестве такого репера берут три взаимно ортогональных сферы y_1, y_2, y_3 и две сферы нулевого радиуса — точки y_4 и y_0 пересечения трех первых сфер. Нормируем координаты сфер y_1, y_2, y_3 так, чтобы $(y_iy_i) = 1$ при $i = 1, 2, 3$. Точки y_4 и y_0 взаимно нормируем так, чтобы $(y_4y_0) = 1$. Тогда эти точки определяются с точностью до множителя φ: $y_4^* = \varphi y_4$, $y_0^* = \frac{1}{\varphi}y_0$.

Матрица полярных произведений основных сфер репера будет следующая:

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_0
y_1	1	0	0	0	0
y_2	0	1	0	0	0
y_3	0	0	1	0	0
y_4	0	0	0	0	1
y_0	0	0	0	1	0

(12.17)

За обобщенные пентасферические координат сферы z принимаем коэффициенты в разложении это сферы по сферам y_i:

$$z = \sum_{i=0}^{4} z_i y_i. \qquad (12.1$$

Координатный трехгранник декартовой систем координат в пространстве также можно рассматриват как полуизотропный репер, в котором сферы $y_1, y_2,$ совпадают с координатными плоскостями, а точк y_4 и y_0 — с началом координат и несобственной то кой пространства. Тогда z_i в формуле (12.18) буду обычными пентасферическими координатами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Клейн. Неевклидова геометрия, ОНТИ—НКТП СССР, М., 1935.

2. Н. А. Глаголев. Проективная геометрия, М., ОНТИ—НКТП СССР, 1936.

3. Ж. Адамар. Элементарная геометрия, ч. 1, М., Учпедгиз, 1948.

4. А. П. Норден. Пространства аффинной связности, М., ГИТТЛ, 1950.

5. П. А. Широков. Тензорное исчисление. Изд. КГУ, Казань, 1961.

6. И. И. Привалов. Введение в теорию функций комплексного переменного, М., ОГИЗ, 1945.

7. А. П. Норден. Теория поверхностей, М., ГИТТЛ, 1956.

8. Ф. Клейн. Высшая геометрия, М., ГОНТИ, 1939.

9. П. А. Широков и А. П. Широков. Аффинная дифференциальная геометрия, М., ГИФМЛ, 1959.

10. W. Blaschke. Vorlesungen über Differentialgeometrie. B. III. Differentialgeometrie der Kreise und Kugeln. Berlin, 1929.

11. Н. И. Мусхелишвили. Курс аналитической геометрии, М., ОГИЗ, 1947.

12. Б. Л. Розенфельд. Неевклидовы геометрии. Гостехтеориздат, М., 1955.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.